Navier-Stokes 流れ場の安定性に関する形状最適化問題

351504052　桐山 恭幸

論文要旨

Navier-Stokes 流れ場は，通常，流速の増加にともなって定常流から非定常流へ遷移する．この遷移は，流れのかく乱に対する複素固有値の実部が負から正に移行するときに起こると考えられている．本研究では，複素固有値の実部の最大値を目的関数においた流れ場の形状最適化問題を定式化し，その解法を開発した．その解法によって得られる流れ場が非定常化しにくい形状になっていることをいくつかの数値例によって示した．

形状最適化問題は次のように構成された．Ω_0 を $d \in \{2,3\}$ 次元の初期領域とする．$\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D} = W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)$ は領域変動の変位を表し，$\Omega(\boldsymbol{\phi})$ は変動後の領域を表すことにする．$\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}$ に対して，定常 Navier-Stokes 問題の解として流速 $\boldsymbol{u}$ と圧力 p が得られると仮定する．$r \in \{1,2,\cdots\}$ 次のかく乱固有対 $(s_r, \hat{\boldsymbol{u}}_r)$ は，この $\boldsymbol{u}$ を用いて，

$$\rho s_r \hat{\boldsymbol{u}}_r^{\mathrm{T}} + \rho\left(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\hat{\boldsymbol{u}}_r^{\mathrm{T}} + \rho\left(\hat{\boldsymbol{u}}_r\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}}\left(\mu\boldsymbol{\nabla}\hat{\boldsymbol{u}}_r^{\mathrm{T}}\right) + \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}}\hat{p} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{C}^d}^{\mathrm{T}} \quad \text{in } \Omega(\boldsymbol{\phi}),$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}_r = 0 \quad \text{in } \Omega(\boldsymbol{\phi}),\ \mu\partial_\nu\hat{\boldsymbol{u}}_r - \hat{p}_r\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{C}^d} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\phi}),\ \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})} \rho\hat{\boldsymbol{u}}_r\cdot\hat{\boldsymbol{u}}_r^{\mathrm{c}}\,\mathrm{d}x = 1$$

と定義される．ただし，μ と ρ は粘度と密度を表す．形状最適化問題は，目的関数と制約関数を

$$f_0(s_r) = \max_{i\in\{1,2,\cdots\}}\left(s_i + s_i^{\mathrm{c}}\right) = \max_{i\in\{1,2,\cdots\}} 2\mathrm{Real}\left[s_i\right],\ f_1(\boldsymbol{\phi}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi})}\mathrm{d}x - c_1$$

とおき，$f_1(\boldsymbol{\phi}) \le 0$ を満たした上で $f_0(s_r)$ を最小にするような領域 $\Omega(\boldsymbol{\phi})$ を求める問題として定式化される．

本研究では，有限要素法解析用言語 FreeFem++ を用いて，H^1 勾配法を基にした数値解析プログラムを作成した．図 1 に，孤立物体がおかれた 2 次元一様流れ場に対する形状最適化の結果を示す．図 2 は，このときの Reynolds 数 Re に対する目的関数の変化を示す．この図より，臨界 Reynolds 数は，初期形状のときに 40.8 であったものが形状最適化後には 291.1 に上昇していることが確認される．

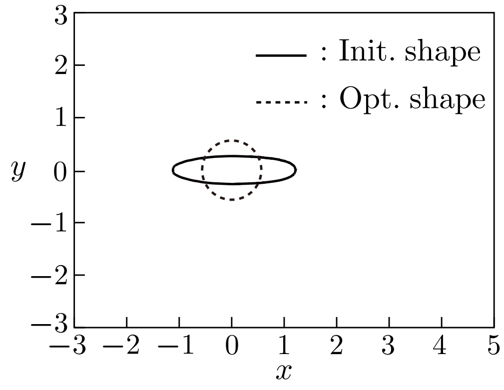

図 1: 形状比較

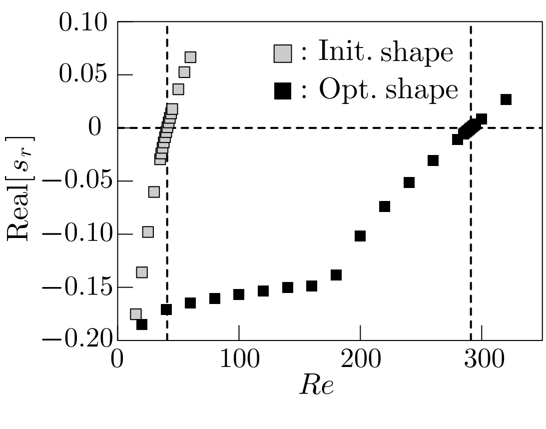

図 2: Reynolds 数に対する最大固有値実部