領域変動型の形状最適化問題に対する Newton 法に関する研究

351504171　古木 謙人

論文要旨

偏微分方程式の境界値問題が定義された領域の形状を最適化する問題は，形状最適化問題と呼ばれる．その中でも，Lagrange 描像によって領域変動を表わす関数を設計変数に選んだ問題は，領域変動型の形状最適化問題と呼ばれる．この問題に対して，これまで，領域変動に対する評価関数の Fréchet 微分 (形状微分) を用いた，関数空間上の勾配法 (H^1 勾配法) が使われてきた．本研究では，領域変動に対する評価関数の 2 階 Fréchet 微分 (Hesse 形式) を求める理論を示し，それを用いた Newton 法 (H^1 Newton 法) を提案する．その方法の有効性は，線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題に対する数値例によって検証される．

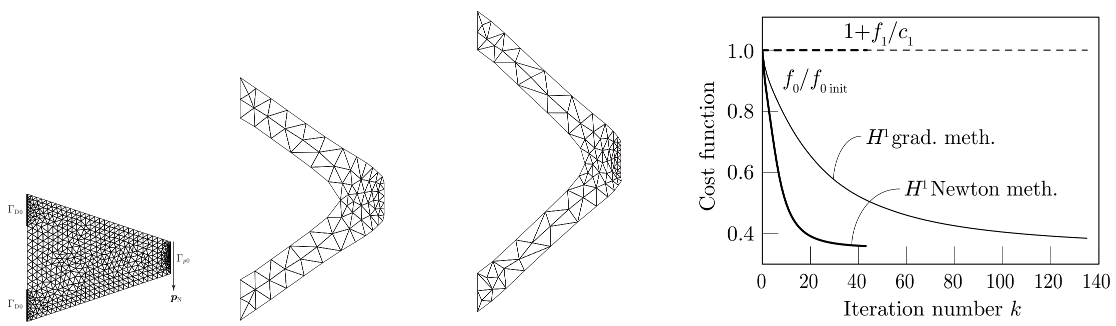
領域変動型の形状最適化問題では，領域変動の変位を表す $\boldsymbol{\phi} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ($d \in \{2, 3\}$) を設計変数とおく．変動した後の領域上で定義された偏微分方程式の境界値問題の解を用いた汎関数によって，目的関数 f_0 と制約関数 $f_1, \cdots, f_m$ が定義される．$i \in \{1, \cdots, m\}$ に対して，f_i の形状微分は，$\boldsymbol{\phi}$ の任意変動 $\boldsymbol{\varphi}$ に対する有界線形汎関数 $f_i'(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}] = \langle \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{\varphi} \rangle$ として定義され，Lagrange 乗数法に基づく汎関数に対する領域積分型の形状微分公式を使って求められる．さらに，f_i の Hesse 形式は，$\boldsymbol{\phi}$ の任意変動 $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2$ に対する有界双線形汎関数 $f_i''(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] = h_i(\boldsymbol{\phi}_k)[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2]$ として定義され，同様の領域積分型形状微分公式を使って求められる．領域変動型の形状最適化問題に対する Newton 法は次のように構成される．繰り返し数 $k \in \{0, 1, \cdots\}$ のときの形状最適化問題に対する Lagrange 関数の Hesse 形式を，任意の $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2$ に対して，

$$h_{\mathscr{L}}(\boldsymbol{\phi}_k)[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] = h_0(\boldsymbol{\phi}_k)[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] + \sum_{i \in \{1, \cdots, m\}} \lambda_{ik} h_i(\boldsymbol{\phi}_k)[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2]$$

とおく．ただし，λ_{ik} は $f_i \leq 0$ に対する Lagrange 乗数とする．また，a_X を $h_{\mathscr{L}}(\boldsymbol{\phi}_k)$ の強圧性と有界性を補うための対称な双 1 次形式とする．本研究では，f_i の降下方向を，任意の $\boldsymbol{\psi}$ に対して次式を満たす $\boldsymbol{\varphi}_{gi}$ によって決定する方法を提案した．

$$h_{\mathscr{L}}(\boldsymbol{\phi}_k)[\boldsymbol{\varphi}_{gi}, \boldsymbol{\psi}] + a_X(\boldsymbol{\varphi}_{gi}, \boldsymbol{\psi}) = -\langle \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{\phi}_k), \boldsymbol{\psi} \rangle$$

この方法の有効性を検証するために，有限要素法プログラミング言語 FreeFem++ を用いて数値解析用プログラムを作成した．図 1 に数値例を示す．



(a) 初期形状　(b) H^1 勾配法　(c) H^1 Newton 法　(d) 収束履歴

図 1: 2 次元線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題に対する数値解析例