密度型位相最適化問題における評価関数の 2階微分と H^1 Newton 法

351504160　福岡 福治

論文要旨

偏微分方程式の境界値問題が定義された領域に最適な穴を空ける問題は位相最適化問題とよばれる．その中でも密度を設計変数に選んだ問題は密度型位相最適化問題とよばれる．これまで，評価関数の降下方向を求めるために，設計変数 θ の変動に対する評価関数の Fréchet 微分 (θ 微分) を用いた H^1 勾配法が使われていた．しかしながら，収束が遅いことが課題とされていた．本研究では，位相最適化問題における評価関数の 2 階 Fréchet 微分 (Hesse 形式) を求め，それを用いた Newton 法 (H^1 Newton 法) によって，評価関数の降下方向を求める方法を開発した．その方法の有効性は数値例によって検証された．

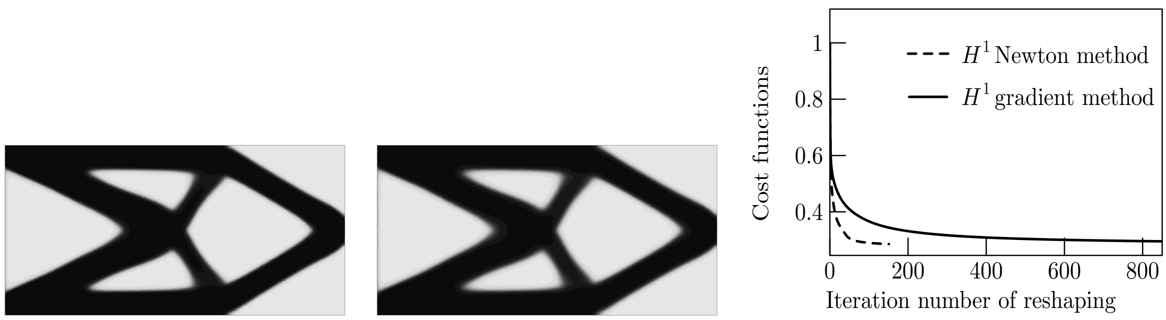
密度型位相最適化問題は次のように定式化される．D を $d \in \{2,3\}$ 次元の Lipschitz 領域とする．$\theta \in X = H^1(D;\mathbb{R})$ を設計変数とおき，密度をシグモイド関数 $\phi(\theta) = (\tanh\theta + 1)/2$ によって与える．偏微分方程式の境界値問題は，$\phi(\theta)$ の指数関数を偏微分方程式の係数にもつように定式化される．目的関数 f_0 と制約関数 $f_1, \cdots, f_m$ は $\phi(\theta)$ と偏微分方程式の境界値問題の解の汎関数によって定義される．$i \in \{0,1,\cdots,m\}$ に対して，f_i の θ 微分 $f_i'(\theta)[\vartheta] = \langle g_i, \vartheta\rangle$ は，偏微分方程式の境界値問題の制約に対して Lagrange 乗数法を適用することによって求められる．f_i の θ Hesse 形式 $f_i''(\theta)[\vartheta_1, \vartheta_2] = h_i(\theta_k)[\vartheta_1, \vartheta_2]$ は，f_i に対する Lagrange 関数の 2 階 Fréchet 微分を用いて求められる．密度型位相最適化問題に対する Newton 法は次のように構成される．繰り返し数 $k \in \{0,1,\cdots\}$ のときの密度型位相最適化問題に対する Lagrange 関数の Hesse 形式を，

$$h_{\mathscr{L}}(\theta_k)[\vartheta_1, \vartheta_2] = h_0(\theta_k)[\vartheta_1, \vartheta_2] + \sum_{i \in \{1,\cdots,m\}} \lambda_{ik} h_i(\theta_k)[\vartheta_1, \vartheta_2]$$

とおく．ただし，λ_i は $f_i \leq 0$ に対する Lagrange 乗数である．また，$a_X : X \times X \to \mathbb{R}$ を $h_{\mathscr{L}}$ の強圧性と有界性を補うための双 1 次形式とする．本研究では，f_i の降下方向を，任意の $\psi \in X$ に対して，次式を満たす ϑ_{gi} によって決定する．

$$h_{\mathscr{L}}(\theta_k)[\vartheta_{gi}, \psi] + a_X(\vartheta_{gi}, \psi) = -\langle g_i(\theta_k), \psi\rangle$$

この方法に基づく数値解析用プログラムは有限要素法プログラミング言語 FreeFem++ を用いて作成された．2 次元線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題を H^1 勾配法と H^1 Newton 法で解析した結果を図 1 で比較している．



(a) H^1 Newton 法　(b) H^1 勾配法　(c) 平均コンプライアンスの履歴

図 1: H^1 Newton 法と H^1 勾配法の比較