拡散方程式の初期値境界値問題を主問題とした位相最適化問題の解法

351104100　鬼頭 秀治

論文要旨

拡散方程式は熱伝導に代表される拡散現象の数理モデルとして使われる．一方，位相最適化問題は偏微分方程式の境界値問題が定義された領域の最適な穴配置を求める問題として定義される．その際，領域上で定義した密度を設定変数にして定式化した問題は密度型位相最適化問題とよばれる．本研究では，拡散現象を効率化するような形状を拡散方程式の境界値問題を主問題にした密度型位相最適化問題の解として求めることができるのかを検証することを目的とした．

D を $d \in \{2,3\}$ 次元領域とする．$\theta \in V = W^{1,\infty}(D;\mathbb{R})$ 設計変数として，

$$\phi(\theta) = \frac{1}{2}\left(\tanh\frac{\theta}{2} + 1\right) \tag{1}$$

を密度とする．(1) により，ϕ の値域は $(0,1)$ に制限される．$\alpha > 1$ を固定して，偏微分方程式の係数に ϕ^α を乗じた問題を SIMP (solid isotropic material with penalization) 型という．本研究では，主問題を次のように定義した．

問題 1 (θ 型 Poisson 問題) $b : D \to \mathbb{R}$ は与えられているとする．このとき，

$$-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi^\alpha(\theta)\boldsymbol{\nabla}u) = b \quad \text{in } D, \quad \phi^\alpha(\theta)\,\partial_\nu u = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{N}}, \quad u = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}}$$

を満たす $u \in U = H^1(D;\mathbb{R})$ を求めよ．

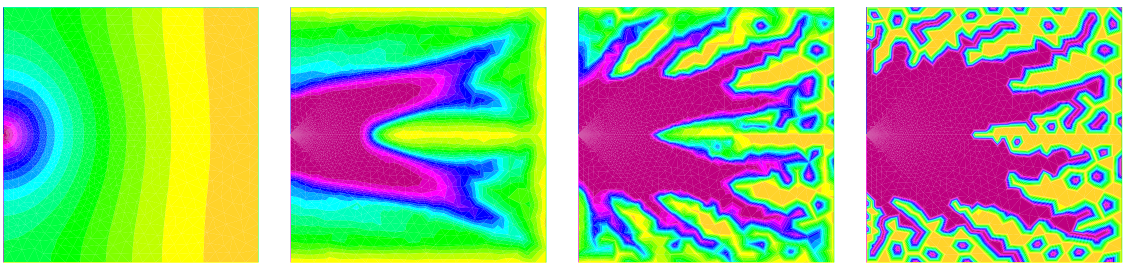
問題 1 の解 u を用いて，拡散量が最大となる最適形状を求める問題を次のように構成した．

問題 2 (拡散最大化問題) $b : D \to \mathbb{R}$ は与えられているとする．このとき，

$$\min_{\theta\in V}\left\{ f_0(u) = -\int_D bu\,\mathrm{d}x \;\middle|\; f_1(\theta) = \int_D \phi(\theta)\,\mathrm{d}x - c_1 \le 0,\ u \in U,\ \text{問題 1}\right\}$$

を満たす θ を求めよ．ただし，c_1 は正定数である．

問題 2 を解くプログラムを FreeFem++ を用いて作成し，数値解を得た．その際，θ の変動を正則性を保って求めるために H1 勾配法が使われた．その結果，図 1 のような植物の根や動物の血管などのような自然界に存在するような養分の配給に適した分岐網を得た．



Loop=0　Loop=1000　Loop=4000　Loop=20000

図 1: 拡散最大化問題の数値解