リンク機構についての形状最適化問題

351004173　周　立人

論文要旨

リンク結合された線形弾性体は機械や骨格をもつ動物などの運動を解析する際の数理モデルとして用いられる．本研究ではその数理モデルを用いて線形弾性体の境界形状を設計対象にした最適化問題を構成し，その問題が可解であることを示すことを目的とした．

本研究では形状最適化問題を次のように構成した．$\mathcal{L}$ を線形弾性体の番号全体の集合，$i \in \mathcal{L}$ に対して $\Omega_0^i \subset \mathbb{R}^2$ を線形弾性体の初期領域として，$\Omega_0 = (\Omega_0^i)_{i\in\mathcal{L}}$ とかく．$\boldsymbol{\phi}^i : \Omega_0^i \to \mathbb{R}^2$ を領域変動として，$\boldsymbol{\phi} = (\boldsymbol{\phi}^i)_{i\in\mathcal{L}}$ とかき，すべての $\boldsymbol{\phi}$ の集合を $\mathcal{O}$ とかく．また，$\boldsymbol{\phi}(\Omega_0) = \Omega(\boldsymbol{\phi})$ とかく．$(0, t_0)$ を時間として，$\boldsymbol{q}^i = \left(\boldsymbol{x}_{\mathrm{G}}^{it\mathrm{T}}, \theta^i\right)^{\mathrm{T}} : (0, t_0) \to \mathbb{R}^3$ を線形弾性体 $i \in \mathcal{L}$ の剛体運動，$\boldsymbol{q} = \left(\boldsymbol{q}^{1\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{q}^{|\mathcal{L}|\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \in Q$ を全体系の剛体運動で

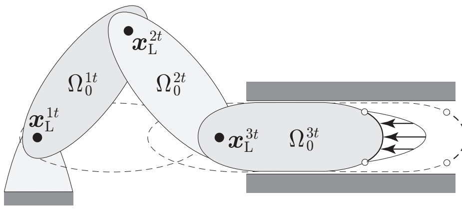
$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\phi})\,\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}) \text{ and } \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{0} \quad \text{in } (0, t_0), \quad \boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0 \text{ and } \dot{\boldsymbol{q}}(0) = \boldsymbol{q}_1$$

を満たすとする．ただし，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\phi}) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{L}|\times|\mathcal{L}|}$ を $\Omega(\boldsymbol{\phi})$ から計算される一般化質量，$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p})$ を境界力 $\boldsymbol{p}$ と体積力 $\boldsymbol{b}$ による一般化外力，$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{0}$ を運動制約とする．さらに，$\boldsymbol{u}^{\mathrm{e}i} : (0, t_0) \times \Omega^i(\boldsymbol{\phi}^i) \to \mathbb{R}^2$ を剛体運動が拘束された下で $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{b}$ および剛体運動による慣性力とリンク結合力が作用したときの線形弾性問題の解として，$\boldsymbol{u}^{\mathrm{e}} = (\boldsymbol{u}^{\mathrm{e}i})_{i\in\mathcal{L}} \in U$ とかく．このとき，形状最適化問題を

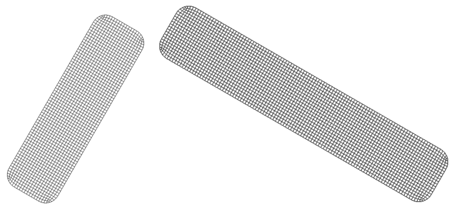
$$\min_{(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{q},\boldsymbol{u}^{\mathrm{e}})\in\mathcal{O}\times Q\times U} \left\{ f^0(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{q}) = -\int_0^{t_0} \boldsymbol{s}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\boldsymbol{y}(t_0) \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t_0) \;\middle|\; f^1(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}^{\mathrm{e}}) \le 0 \right\}$$

を満たす $\Omega(\boldsymbol{\phi})$ を求める問題として構成した．ここで，$-f^0$ は外力仕事の意味をもつ．また，f^1 には領域の大きさに対する制約関数をおいて場合と Mises 応力の $(0, t_0) \times \Omega(\boldsymbol{\phi})$ における KS 関数に対する制約関数をおい場合を仮定した．

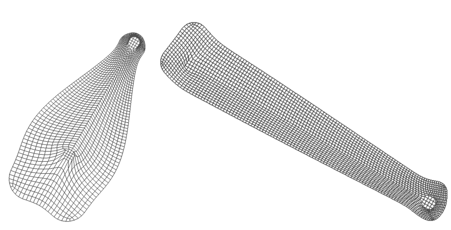
その結果，f^0 と 2 つの f^1 に対する制約関数を用いた場合の形状微分を計算するプログラムを開発し，H^1 勾配法による形状最適化解析により数値解を得た．



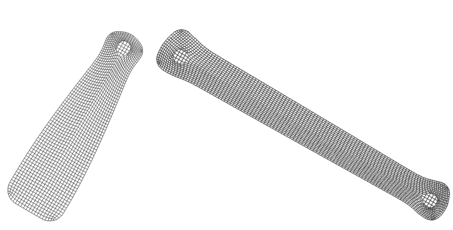
リンク結合された線形弾性体



初期形状 Ω_0



f^1：領域の大きさ制約関数



f^1：KS 関数に対する制約関数