# 密度型位相最適化問題の数値解法とその応用に関する研究

350904030　伊藤 友文

論文要旨


偏微分方程式の境界値問題が定義された領域の最適な穴配置を求める問題は，位相最適化問題とよばれる．この問題は，密度のべき乗を偏微分方程式の係数に選ぶことで正則に解けることが示されている．本研究では，この密度型位相最適化問題の数値解法を開発し，その解法を弾性体の損傷個所を同定する問題に適用した．

$D$ を $d \in \{2,3\}$ 次元領域とする．$\theta \in W^{1,\infty}(D;\mathbb{R})$ 設計変数として，

$$\phi(\theta) = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\theta + \frac{1}{2} \tag{1}$$

を健全率とする．この変換により，$\phi$ の値域は $(0,1)$ に制限される．$\alpha > 1$ を固定して，偏微分方程式の係数に $\phi^\alpha$ を乗じた問題を SIMP (solid isotropic material with penalization) 型という．

本研究では，次の問題を境界値問題に選んだ．

**問題 1 (SIMP 型線形弾性体の振動固有値問題)** $\theta$ が与えられたとき，$i \in \{1,\cdots,m\}$ に対して，

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\sigma}(\theta,\boldsymbol{u}_i) = \eta_i \varrho \boldsymbol{u}_i \quad \text{in } \Omega, \quad \boldsymbol{\sigma}(\theta,\boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{0} \quad \text{on } \Omega\setminus\bar{\Gamma}_{\mathrm{D}}, \quad \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}}$$

を満たす $\{(\eta_i,\boldsymbol{u}_i)\} \in \left(\mathbb{R}\times H^1\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)\right)^m$ を求めよ．

ただし，$\boldsymbol{\sigma}$ は $\phi^\alpha$ が乗じられた応力，$\eta_i = \omega_i^2$, $\omega_i$, $\boldsymbol{u}_i$ を $i$ 次の振動固有値，固有振動数，固有振動モードという．$\varrho \in W^{1,\infty}(D;\mathbb{R})$ は固定密度である．

振動実験によって計測された振動固有値 $\eta_i$, $i \in \{1,\cdots,m\}$, を用いて，弾性体の損傷個所を同定する問題を次のように構成した．

**問題 2 (振動固有値による損傷同定問題)** $\theta$ に対して，$(\boldsymbol{\eta},\bar{\boldsymbol{u}})$ を問題 1 の解とするとき，

$$\min_{\theta\in W^{1,\infty}(D;\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{m} \left|\eta_i - \eta_{0\,i}\right|^2$$

を満たす $\theta$ を求めよ．

この問題の数値解析プログラムを $H^1$ 勾配法を用いた開発した．損傷のある実際のレンガ煙突に対する振動固有値の計測結果を用いて，開発されたプログラムにより損傷同定を行った結果，破壊実験で崩壊した位置に近い位置で $\phi$ が低下した結果を得た．