

# NURBS を用いた Galerkin 法による線形弾性問題の解法

350804338 山本 真之

## 論文要旨

3D-CAD では、数値モデルの形状を NURBS (Non-uniform rational B-spline) 関数を用いて表している。一方、有限要素法では、有限要素モデルの形状や近似関数を要素内部で低次多項式の連続関数を基底関数に用いていた。この違いは、CAD モデルを用いて数値解析を行う上の障害となっていた。

本研究では、NURBS を基底関数にした有限要素法プログラムを開発することにより、その障害を回避することを目指した。境界値問題として、次の線形弾性問題を選んだ。

線形弾性問題の弱形式:  $\Omega \subset \mathbf{R}^d, d = 2, 3, \Gamma_0 \subset \partial\Omega, \mathbf{f} \in L^2(\Omega; \mathbf{R}^d), \mathbf{p} \in L^2(\partial\Omega \setminus \Gamma_0; \mathbf{R}^d)$  に対して、

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_0} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V = \left\{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbf{R}^d) \mid \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_0 \right\}$$

を満たす  $\mathbf{u} \in V$  を求めよ。ただし、 $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$  はそれぞれ応力とひずみを表す。 ■

一方、NURBS 基底関数は次のようにかける。

**NURBS 基底関数:**  $d = 2, 3$  次元空間に対して、 $\mathbf{p} = (p_i)_i \in \mathbb{N}^d$  を次数、 $\mathbf{n} = (n_i)_i \in \mathbb{N}^d$  を制御点数、 $\mathbf{t}_j = (t_j^i)_i \in \mathbb{R}^{n_j+p_j+1}, j = 1, 2, \dots, d$ , をノット、 $\mathbf{w} = (w_{j_1 j_2 \dots j_d})_{j_1 j_2 \dots j_d} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_d}$  を重みとする。  $\mathbf{t} \in [t_1^1, t_1^{n_1+p_1+1}] \times [t_2^1, t_2^{n_2+p_2+1}] \times \dots \times [t_d^1, t_d^{n_d+p_d+1}]$  に対して

$$R_{j_1 j_2 \dots j_d}(\mathbf{t}) = N_{j_1}^{p_1}(t_1) N_{j_2}^{p_2}(t_2) \cdots N_{j_d}^{p_d}(t_d) w_{j_1 j_2 \dots j_d} \left/ \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{j_d=1}^{n_d} N_{j_1}^{p_1}(t_1) N_{j_2}^{p_2}(t_2) \cdots N_{j_d}^{p_d}(t_d) w_{j_1 j_2 \dots j_d} \right.$$

を  $d$  次元の NURBS 基底関数という。ただし、 $N_{j_i}^{p_i}(t_i)$  は  $t_i$  方向  $t_i = t_i^{j_i}$  における B-spline 基底関数である。B-spline 基底関数  $N_i^p: [t^i, t^{i+p+1}] \rightarrow \mathbb{R}$  は

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & (t^i \leq t < t^{i+1}) \\ 0 & (t < t^i, t^{i+1} \leq t) \end{cases}, \quad N_i^k(t) = \frac{t - t^i}{t^{i+k-1} - t^i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t^{i+k} - t}{t^{i+k} - t^{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t) \quad (1 \leq k \leq p)$$

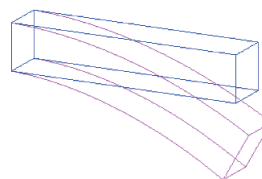
で定義される。 ■

本研究により、次の結果を得た。

- (1) NURBS 基底関数をアイソパラメトリック要素の基底関数に用いた有限要素法解析プログラムを開発した。
- (2) 2次元穴あき平板、3次元片持ち梁に対する解析例を示した。



穴あき平板の応力



片持ち梁の変形