

# 有限要素法解析における誤差評価に関する研究

050600370 松下 亮太

## 論文要旨

有限要素法は偏微分方程式の境界値問題に対する数値解法として発展してきた。その特徴の一つは、誤差評価の理論が整備されていることである。一方、境界値問題の定義された領域の境界形状を設計対象にした形状最適化問題では、評価汎関数の形状微分が解の法線方向微分によって評価されることから、解の1階微分の精度が求められる。

そこで、本研究では、形状最適化問題を解くプログラムに誤差を抑制する適応メッシュ分割の機能を追加するための準備として、有限要素法による解の誤差を評価するプログラムを開発し、誤差評価の理論式が成り立つことを検証することを目的とした。

**定理 (大域的な補間誤差):** 矩形領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2, 3$ , に対して,  $\{\mathcal{M}^h\}_{h>0}$  を有限要素サイズ  $h > 0$  の正則な矩形分割族,  $V_h$  を有限要素内で  $d$  重  $k$  次多項式, かつ有限要素境界で連続な近似関数の集合,  $\pi_h : H^{k+1}(\Omega; \mathbb{R}) \rightarrow V_h$ ,  $k+1 > d/2$ , を補間作用素,  $u_h = \pi_h u$  とする。このとき,

$$\|u - u_h\|_{H^j(\Omega; \mathbb{R})} \leq Ch^\beta |u|_{H^r(\Omega; \mathbb{R})} \quad \forall u \in H^{k+1}(\Omega; \mathbb{R}),$$
$$\beta = \min\{k+1-j, r-j\}, \quad 0 \leq j \leq k+1, \quad 0 \leq r \leq k+1$$

が成り立つ。ただし,  $C$  は  $u \in H^{k+1}(\Omega; \mathbb{R})$  や  $h$  には依存しない正定数である。 ■

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$  の境界に, 角度  $\alpha > \pi$  の凹角があるとき, 角の近傍で

$$u \in H^{1+\frac{\alpha}{2}}$$

となることが知られている。L型領域の角,  $\alpha = 3\pi/2$ , では,  $u \in H^{5/3}(\Omega; \mathbb{R})$  となる。したがって, 上記定理より,  $k=1, j=1, r=5/3$  のとき, 有限要素法の解  $u_h$  について,

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R})} \leq Ch^{2/3} |u|_{H^{5/3}(\Omega; \mathbb{R})}$$

が成り立つ。

本研究では, L型領域の線形弾性問題に対する誤差評価を行った。  $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)}$  の評価には Zienkiewicz-Zhu の方法を用いた。本研究の成果は次のとおりである。

- (1) 有限要素法解析の誤差評価ができるプログラムを開発した。
- (2) 有限要素法解に対する誤差評価の結果を理論式と比較して, 理論の枠内に収まることを確認した。
- (3) 線形弾性問題の平均コンプライアンスに対する形状勾配を評価し, 有限要素サイズと精度の関係を明らかにした。