点群からのNURBS曲面の創成と形状モデリング

050600150　久保田 茜

論文要旨

生体などの複雑な幾何形状をもつ物体の数値モデルを作成するためには，様々な機器で計測された点群から面を構成する問題を解く必要がある．さらに，面の滑らかさを自由に制御しようとすると NURBS 曲面が適している．

昨年度，服部は，3 次元空間上の点群が与えられたとき，その点群に適合する NURBS 曲面を求める問題を構成し，制御点を設計変数にした解法を示した．本研究では，設計変数に重みを追加して，さらなる誤差の最小化を目指した．

B-spline 基底関数: 階数 $m \in \mathbf{N}$, 制御点数 $n \in \mathbf{N}$, ノット $\boldsymbol{t} = \left(t^i\right)_i \in \mathbb{R}^{n+m}$, $t^i \le t^{i+1}$, に対して,

$$N_i^1(t) = \begin{cases} 1 & \left(t^i \le t < t^{i+1}\right) \\ 0 & \left(t < t^i,\ t^{i+1} \le t\right) \end{cases} \quad ,\ N_i^k(t) = \frac{t - t^i}{t^{i+k-1} - t^i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t^{i+k} - t}{t^{i+k} - t^{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t) \quad (2 \le k \le m)$$

を B-spline 基底関数という．■

NURBS 曲面: 階数 $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}^2$, 制御点数 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^2$, ノット $\boldsymbol{t}_i = \left(t_i^j\right)_j \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$, $t_i^j \le t_i^{j+1}$, 制御点 $\boldsymbol{q} = \left(\boldsymbol{q}_{ij}\right)_{ij} \in \left(\mathbb{R}^3\right)^{n_1 \times n_2}$, 重み $\boldsymbol{w} = \left\{w_{ij}\right\}_{ij} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ として，任意の $\boldsymbol{t} \in \left[t_1^0, t_1^{m_1+n_1-1}\right] \times \left[t_2^0, t_2^{m_2+n_2-1}\right]$ に対して,

$$\boldsymbol{p}\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}\right)(\boldsymbol{t}) = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} N_i^{m_1}(t_1) N_j^{m_2}(t_2) w_{ij} \boldsymbol{q}_{ij} \Bigg/ \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} N_i^{m_1}(t_1) N_j^{m_2}(t_2) w_{ij}$$

を NURBS 曲面という．ただし，$N_i^m(t)$ は B-spline 基底関数である．■

誤差ノルム最小化問題: 点群数 $\bar{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{N}^2$, 点群 $\bar{\boldsymbol{p}} = \left(\bar{\boldsymbol{p}}_{ij}\right)_{ij} \in \left(\mathbb{R}^3\right)^{\bar{n}_1 \times \bar{n}_2}$, $\bar{\boldsymbol{t}}_i = \left(\bar{t}_i^j\right)_j \in \mathbb{R}^{\bar{m}_i + \bar{n}_i}$, $\bar{t}_i^j \le \bar{t}_i^{j+1}$, $i = 1, 2$, を既知とする．ある $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} < \bar{\boldsymbol{n}}$ に対して,

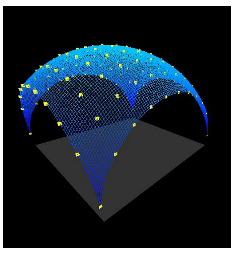
$$f\left(\boldsymbol{q}^\star, \boldsymbol{w}^\star\right) = \min_{(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}) \in \left(\mathbb{R}^4\right)^{n_1 \times n_2}} \left\{ f\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}\right) = \sum_{i=0}^{\bar{n}_1-1} \sum_{j=0}^{\bar{n}_2-1} \left| \bar{\boldsymbol{p}}_{ij} - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w})(\bar{t}_1^i, \bar{t}_2^j) \right|^2 \right\}$$

を満たす $(\boldsymbol{q}^\star, \boldsymbol{w}^\star)$ を求めよ．■

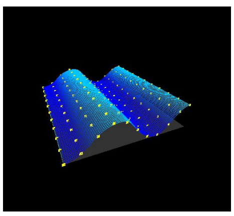
この問題に対して, 次の結果を得た.

(1) 誤差ノルムの勾配を評価し，勾配法で最適解を求めるプログラムを開発した.

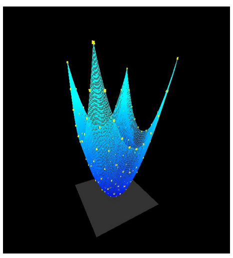
(2) 制御点のみを設計変数にした場合よりも，さらに誤差を最小化する曲面が創成できることを示した．解析関数以外の点群では滑らかさの制限が必要なことを考察した.



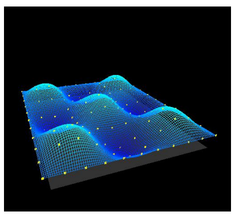
$x_3 = \sqrt{10^2 - x_1^2 - x_2^2}$



$x_3 = \cos x_1$



$x_3 = x_1^2 + x_2^2$



$x_3 = \sin x_1 \sin x_2$