大変形ひずみ解析に基づく特発性側弯症の発生メカニズムの解明に関する研究

350804176　小倉 章弘

論文要旨

数値解析による病理解明は，通常，仮説に基づいて行われる．しかし，仮説に基づく解析では疾患が現れない場合，正常モデルと疾患モデルを作成し，両者間の写像を求めて，その解析を通して仮説を立てるアプローチが考えられる．

本研究では，特発性側弯症の成因解明を目指して，正常な脊柱から側弯形態への参照変位が与えられたとき，正常なモデルから疾患モデルへの写像を求める問題を構成し，その数値解法を示した．その問題は次のようにかける．

変位誤差ノルム最小化問題: $\Omega \in \mathbb{R}^3$ を正常モデルの固定領域，ある固定部分境界 $\Gamma^1 \subset \partial\Omega$ に対して，$\boldsymbol{T}: \Gamma^1 \to \Gamma_{\mathrm{scol}}$ を医療データから与えられた写像，$\boldsymbol{u}^1 = \boldsymbol{T} - \boldsymbol{I}$ ($\boldsymbol{I}$ は恒等写像) を参照変位とする．このとき，

$$\min_{(\phi,\boldsymbol{u})\in\Phi\times U}\left\{ J(\boldsymbol{u}) = \int_{\Gamma^1}\alpha\left|\boldsymbol{u}^1-\boldsymbol{u}\right|^2 \mathrm{d}\gamma \,\middle|\, \int_\Omega \boldsymbol{S}(\phi,\boldsymbol{u})\cdot\delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}X = \int_{\Gamma^1}\alpha\left(\boldsymbol{u}^1-\boldsymbol{u}\right)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\gamma \quad \forall\boldsymbol{v}\in U\right\}$$

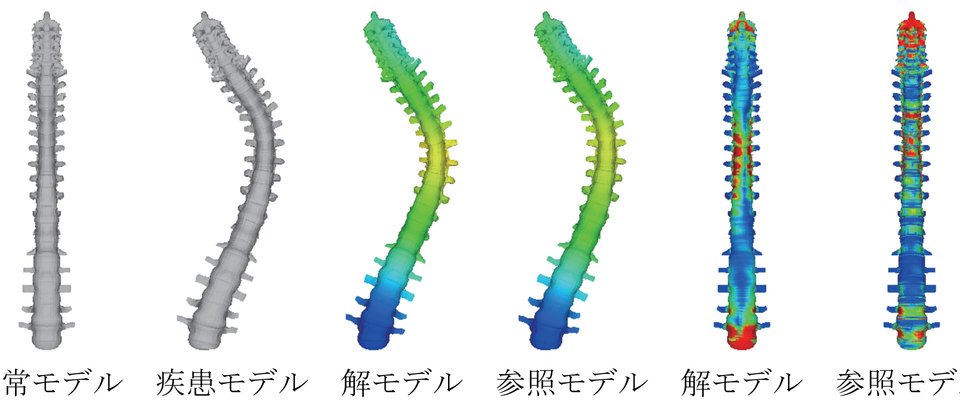
を満たす密度 ϕ と変位 $\boldsymbol{u}$ を求めよ．ただし，$\Phi = \left\{\phi \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}) \,\middle|\, 0 < \phi_0 \leq \phi \leq \phi_1\right\}$, ϕ_0, ϕ_1 は正定数, $U = \left\{\boldsymbol{u} \in H^1\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right) \,\middle|\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \text{ on } \Gamma_0\right\}$, $\Gamma_0 \subset \partial\Omega \setminus \Gamma^1$, $\boldsymbol{S}(\phi,\boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ は第 2 Piola-Kirhhoff 応力，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ は Green-Lagrange ひずみ，$\boldsymbol{S}(\phi,\boldsymbol{u}) = \phi^p \boldsymbol{C}^0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})$, p は正定数, $\boldsymbol{C}^0 \in W^{1,\infty}\left(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d\times d\times d}\right)$ は楕円性を満たす固定された関数, $\alpha \in L^\infty\left(\Gamma^1;\mathbb{R}\right)$ は固定された正の関数とする．■

本研究では，次の結果を得た．

(1) $J(\boldsymbol{u})$ の密度変動に対する一般化微分を求め，勾配の計算法を示した．また，勾配を用いた H^1 勾配法による上記問題の解法を示した．ただし，制約 $\phi_0 \leq \phi \leq \phi_1$ に対して，変数変換 $\phi = \phi_1(\tanh\theta + 1)/2$ を用いた．

(2) 上記問題を解くための有限要素法を用いたプログラムを開発した．

(3) 正常な脊柱から弯曲脊柱への写像問題に対して，$J(\boldsymbol{u})$ がゼロに収束する結果を得た．



正常モデル　疾患モデル　解モデル　参照モデル　解モデル　参照モデル

変位　ひずみ