アイソジオメトリック解析における基礎的研究

050500406　山口 大介

論文要旨

3D-CAD では NURBS (Non-uniform rational B-spline) を用いて形状が表現されている．一方，有限要素法では，領域全体で連続，要素内部で低次多項式の基底関数が使われてきた．本研究では，3D-CAD と数値解析のデータ構造を同一にすることを目指して，NURBS を基底関数にした Galerkin 法による有限要素法解析プログラムを開発した．

NURBS 基底関数: $p \in \mathbf{N}$ (正整数) , $\xi_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ $(\xi_i \le \xi_{i+1})$ とする．次の $N_i^p : \left[\xi_i, \xi_{i+p}\right] \to \mathbf{R}$ を B-spline 基底関数という．p を次数，ξ_i をノットという．

$$N_i^0(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi_i \le \xi < \xi_{i+1}) \\ 0 & (\xi < \xi_i,\ \xi_{i+1} \le t) \end{cases} \qquad N_i^k(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+k-1} - \xi_i} N_i^{k-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+k} - \xi}{\xi_{i+k} - \xi_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(\xi) \quad (1 \le k \le p)$$

$\boldsymbol{p} \in \mathbf{N}^2$, $\boldsymbol{n} \in \mathbf{N}^2$, $w_{ij} \in \mathbf{R}$, $(i, j = 1, 2, \cdots)$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^2$ とする．次の $R_{ij} : \left[\xi_{i1}, \xi_{i+p\,1}\right] \times \left[\xi_{i2}, t_{i+q\,2}\right] \to \mathbf{R}$ を２次元の NURBS 基底関数という．n_i を ξ_i 方向の節点 (制御点) 数，w_{ij} を重みという．

$$R_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = N_i^{p_1}(\xi_1) N_j^{p_2}(\xi_2) w_{ij} \Bigg/ \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} N_i^{p_1}(\xi_1) N_j^{p_2}(\xi_2) w_{ij} \quad \square$$

線形弾性問題の弱形式: 領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, $\partial\Omega = \Gamma, \Gamma_0 \subset \Gamma$ とする．外力 $\boldsymbol{P} : \Gamma \setminus \Gamma_0 \to \mathbf{R}^2$ に対する変位を $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbf{R}^2$ とする．$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \in \mathbf{R}^{2\times2}$ をひずみ，$\boldsymbol{E} : \Omega \to \mathbf{R}^{2\times2\times2\times2}$ を剛性とする．$\boldsymbol{P}$ を既知として，次の $\boldsymbol{u} \in U$ を求めよ．

$$\int_\Omega \boldsymbol{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}x = \int_{\Gamma\setminus\Gamma_0} \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\Gamma \quad \forall \boldsymbol{v} \in U = \left\{ \boldsymbol{u} \in H^1\left(\Omega; \mathbf{R}^2\right) \,\middle|\, \boldsymbol{u} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_0 \right\} \quad \square$$

NURBS を基底関数にした Galerkin 法: 上記定義を用いる．領域 $\Xi = [\xi_{11}, \xi_{1n_1}] \times [\xi_{21}, \xi_{2n_2}] \in \mathbf{R}^2$ とする．形状近似関数 $\boldsymbol{x}_h : \Xi \to \Omega$ と変位近似関数 $\boldsymbol{u}_h : \Xi \to \Omega$ を次式で構成する．$\boldsymbol{n}$ を節点 (制御点) の数，$\mathbf{x}_{ij} \in \mathbf{R}^2, \mathbf{u}_{ij} \in \mathbf{R}^2$ を $\boldsymbol{x}_h$, $\boldsymbol{u}_h$ の節点値という．

$$\boldsymbol{x}_h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} R_{ij}(\boldsymbol{\xi})\, \mathbf{x}_{ij} \quad \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} R_{ij}(\boldsymbol{\xi})\, \mathbf{u}_{ij}$$

弱形式の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$ に $\boldsymbol{x}_h$, $\boldsymbol{u}_h$ を仮定すると次式が成り立つ．ただし，$\mathbf{u} = \left(\mathbf{u}_{11}^\mathrm{T}, \mathbf{u}_{12}^\mathrm{T}, \cdots, \mathbf{u}_{n_1 n_2}^\mathrm{T}\right)^\mathrm{T}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{P}$ も同様，$\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ は節点変位–ひずみ行列，剛性行列，$J = \det(\partial\boldsymbol{x}/\partial\boldsymbol{\xi})$ である．

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{K}\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in U_h \quad \boldsymbol{K} = \int_\Xi \boldsymbol{B}^\mathrm{T}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}) J\, \mathrm{d}\xi \quad \square$$

本研究では，次の結果を得た．

- 上式を解くプログラムを開発した．$\boldsymbol{K}$ は，要素 (パッチ) $\left[\xi_{ij}, \xi_{i+1\,j}\right] \times \left[\xi_{ij}, \xi_{i\,j+1}\right]$ ごとの積分に置き換えることができる．要素ごとの積分には Gauss の求積法を用いた．
- 節点挿入 (h 法)，次数の増加 (p 法)，それらの組み合わせ (k 法) による解の精度評価を行った．