音場構造連成系における放射音圧を最大化する楽器の形状最適化問題

350704244　中村 有里

論文要旨

楽器が生みだす音場は，弾性体と空気で構成された連成系の振動と考えることができる．その問題の数理モデルを次の初期値境界値問題で構成する．

音場構造連成系の放射音圧問題: 領域 $\Omega = \Omega^{\mathrm{a}} \cup \Omega^{\mathrm{s}} \subset \mathbf{R}^d$ $(d = 3)$, $\partial\Omega = \Gamma$, $\partial\Omega^{\mathrm{s}} = \Gamma^{\mathrm{s}}$, $\Gamma_0 \subset \Gamma^{\mathrm{s}}$, $\Gamma^P \subset \Gamma^{\mathrm{s}} \setminus \Gamma_0$, 時間 $\mathbf{R}$ とする．密度 $\rho^{\mathrm{a}}, \rho^{\mathrm{s}}$ は正定数とする．外力 $\boldsymbol{P}:\ \Gamma^P \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^d$ を既知とする．このとき，次式を満たす速度ポテンシャル $\phi:\ \Omega^{\mathrm{a}} \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ と変位 $\boldsymbol{u}:\ \Omega^{\mathrm{s}} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^d$ を求めよ．ただし，応力 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) \in \mathbf{R}^{d\times d}$，音圧 $p = \rho^{\mathrm{a}}\dot{\phi}$ である．

$$
\begin{aligned}
\frac{\rho^{\mathrm{a}}}{c^2}\ddot{\phi} - \rho^{\mathrm{a}}\Delta\phi &= 0 \quad \text{in } \Omega^{\mathrm{a}} \times \mathbf{R} & \rho^{\mathrm{s}}\ddot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) &= 0 \quad \text{in } \Omega^{\mathrm{s}} \times \mathbf{R}\\
\rho^{\mathrm{a}}\boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{a}} + \rho^{\mathrm{a}}\dot{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{a}} &= 0 \quad \text{on } (\Gamma^{\mathrm{s}} \setminus \Gamma_0) \times \mathbf{R} & \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}} + \rho^{\mathrm{a}}\dot{\phi}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}} &= 0 \quad \text{on } \left(\Gamma^{\mathrm{s}} \setminus \Gamma^P \cup \Gamma_0\right) \times \mathbf{R}\\
\boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{a}} &= 0 \quad \text{on } \Gamma_0 \times \mathbf{R} & \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{0} \quad \text{on } \Gamma_0 \times \mathbf{R}\\
\frac{\rho^{\mathrm{a}}}{c}\dot{\phi} + \rho^{\mathrm{a}}\boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \boldsymbol{\nu}^{\mathrm{a}} &= 0 \quad \text{on } \Gamma \times \mathbf{R} & \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}} + \rho^{\mathrm{a}}\dot{\phi}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{s}} &= \boldsymbol{P} \quad \text{on } \Gamma^P \times \mathbf{R}. \quad \square
\end{aligned}
$$

本研究では，固定周波数領域 (ω_1, ω_2) の放射音圧パワー $-J^{(0)}$，固有振動数 $\lambda^{(\mathrm{r}_l)}$ $(l = 1, 2, \cdots, m)$ に対する制約 $J^{(l)}$，領域の大きさ制約 $J^{(m+1)}$ に対して，最適な領域 $\Omega^\star \in \mathcal{W}$ を求める次の問題に取り組んだ．ただし，$\lambda_0^{(\mathrm{r}_l)}, m_0$ は正定数，$(\hat{\cdot})$ は Fourier 変換である．

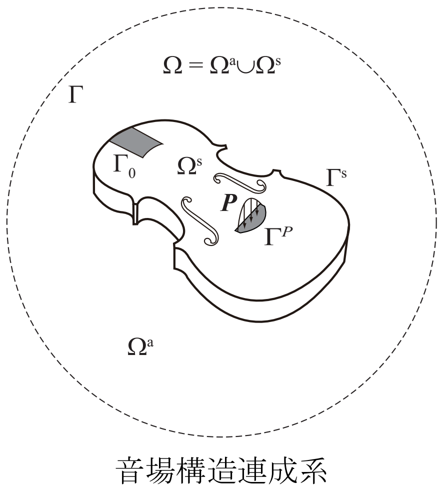
$$
J^{(0)}\left(\Omega^\star, \hat{\phi}^\star\right) = \min_{\Omega\in\mathcal{W}}\left\{ J^{(0)}\left(\Omega, \hat{\phi}\right) \,\middle|\, J^{(l)}\left(\Omega, \lambda^{(\mathrm{r}_l)}\right) = 0\ (l = 1, 2, \cdots, m),\ J^{(m+1)}(\Omega) \le 0 \right\}
$$

$$
\text{where} \quad J^{(0)}\left(\Omega, \hat{\phi}\right) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} -\omega^2\rho^{\mathrm{a}2}\int_{\Gamma}\left|\hat{\phi}\right|^2 \mathrm{d}\Gamma\,\mathrm{d}\omega, \quad J^{(l)}\left(\Omega, \lambda^{(\mathrm{r}_l)}\right) = \lambda^{(\mathrm{r}_l)2} - \lambda_0^{(\mathrm{r}_l)2}
$$

$$
J^{(m+1)}(\Omega) = m_0 - \int_{\Omega^{\mathrm{s}}} \mathrm{d}\Omega, \quad \mathcal{W} = \left\{\Omega \subset \mathbf{R}^d \,\middle|\, \text{constraints for domains}\right\}.
$$

この問題に対して次の結果を得た．

- 音場構造連成系の放射音圧問題の解と随伴問題の解を用いて $J^{(0)}$ の形状微分が計算できる．
- H^1 勾配法を用いた数値解法が考えられる．その解法を用いた有限要素法による数値解析プログラムを開発した．
- バイオリンの表板裏面に付けられたバスバーの形状最適化問題を解析した結果，制約を満たした下で $J^{(0)}$ が単調に減少し収束する結果を得た．



音場構造連成系