# Navier-Stokes 問題における形状最適化問題の数値解法

350704058　岩田 侑太朗

論文要旨

Navier-Stokes 問題は非圧縮性粘性流体の非定常な流れ場を数理モデル化した初期値境界値問題である.

**Navier-Stokes 問題**: 領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ $(d = 2, 3)$, その境界 $\Gamma$, $\Gamma_0 \subset \Gamma$, 時間 $(0, T)$ とする. $\boldsymbol{u}_0: \Gamma_0 \times (0, T) \to \mathbf{R}^d$ と $\boldsymbol{u}_0^0: \Omega \to \mathbf{R}^d$ を既知，$\eta = 1/\mathrm{Re}, \mathrm{Re} > 0$ を定数 (レイノルズ数) とする．このとき，次式を満たす流速と圧力 $(\boldsymbol{u}, p): \Omega \times (0, T) \to \mathbf{R}^{d+1}$ を求めよ.

$$\dot{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{u} - \eta \Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla} p = \boldsymbol{0} \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \nu} - p\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{0} \quad \text{on } (\Gamma \setminus \Gamma_0) \times (0, T), \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 \quad \text{on } \Gamma_0 \times (0, T), \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0^0 \quad \text{at } t = 0 \text{ in } \Omega. \quad \square$$

本研究では，$\Omega$ が変動すると仮定して，圧力損失 $J^{(0)}$ と領域の大きさ制約 $J^{(1)}$ に対して，最適な領域 $\Omega^\star \in \mathcal{W}$ を求める問題に取り組んだ．ただし，$m_0$ は正定数とする.

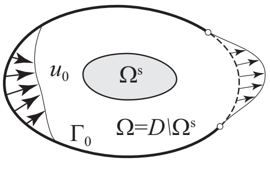
$$J^{(0)}(\Omega^\star, \boldsymbol{u}^\star, p^\star) = \min_{\Omega \in \mathcal{W}} \left\{ J^{(0)}(\Omega, \boldsymbol{u}, p) \;\middle|\; J^{(1)}(\Omega) \le 0 \right\}$$

$$\text{where} \quad J^{(0)}(\Omega, \boldsymbol{u}, p) = -\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} p \,\mathrm{d}x, \quad J^{(1)}(\Omega) = m_0 - \int_\Omega \mathrm{d}x$$

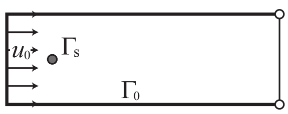
$$\mathcal{W} = \left\{ \Omega \subset \mathbf{R}^d \;\middle|\; \text{constraints for domains} \right\}.$$

この問題に対して次の結果を得た.

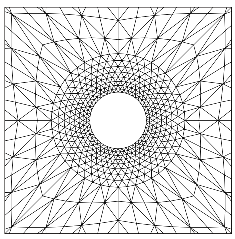
- Navier-Stokes 問題の解と随伴問題の解を用いて $J^{(0)}$ の形状微分が計算できる.
- 形状微分が評価できたことにより，$H^1$ 勾配法を用いた有限要素法による数値解析プログラムを開発した.
- 流れ場の中に置かれた障害物の形状最適化問題を解析した結果，$J^{(1)}$ 一定の下で $J^{(0)}$ が単調に減少し収束する結果を得た.

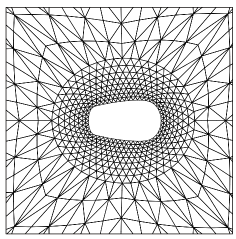


Navier-Stokes 問題



解析モデル


初期形状


最適形状