大変形接触する弾性体の形状同定問題の解法

350704040　岩井 孝広

論文要旨

大変形して接触する弾性体の変形と接触圧力を決定する問題は非線形楕円型偏微分方程式の不等式制約付の境界値問題として数理モデル化される．

大変形接触する弾性問題: 領域 $\Omega = \bigcup_{m\in\{\mathrm{A,B,C}\}} \Omega^{(m)} \subset \mathbf{R}^d$ $(d = 2, 3)$，その境界 $\Gamma = \bigcup_{m\in\{\mathrm{A,B,C}\}} \Gamma^{(m)}$，$\Gamma_0 \subset \Gamma^{(\mathrm{C})}$，$\Gamma_p \subset \Gamma^{(\mathrm{A})}$，$\Gamma_c = \Gamma^{(\mathrm{A})} \setminus \left(\Gamma^{(\mathrm{B})} \cup \Gamma_p\right)$，時間 $(0, T)$ とする．外力 $\boldsymbol{p} : \Gamma_p \times (0, T) \to \mathbf{R}^d$ に対する変位を $\boldsymbol{u} : \Omega \times (0, T) \to \mathbf{R}^d$ とする．第 2 Piola-Kirchhoff 応力 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \in \mathbf{R}^{d\times d}$ は Green-Lagrange ひずみ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) \in \mathbf{R}^{d\times d}$ と $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{CE}(\boldsymbol{u})$ で関連付けられるとする．ただし，$\boldsymbol{C} : \Omega \to \mathbf{R}^{d\times d\times d\times d}$ は楕円性を満たすとする．貫通距離 $g(\boldsymbol{u}) \in \mathbf{R}$ として，接触制約 $g(\boldsymbol{u}) \geq 0$ on Γ_c に対する Lagrange 乗数 (接触圧力) を $\lambda : \Gamma_c \times (0, T) \to \mathbf{R}$ とする．このとき，$\boldsymbol{p}$ を既知として，次式を満たす $(\boldsymbol{u}, \lambda) \in U \times \Lambda$ を求めよ．

$$\min_{\boldsymbol{u}\in U} \max_{\lambda\in\Lambda} \left\{ \int_0^T \left(\int_\Omega \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_c} g(\boldsymbol{u}) \dot{\lambda} \, \mathrm{d}\Gamma \right) \mathrm{d}t - \int_{\Gamma_p} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{u}|_T \, \mathrm{d}\Gamma \right\}$$

$$\text{where} \quad U = \left\{ \boldsymbol{u} \in H^1\left(\Omega \times (0, T); \mathbf{R}^d\right) \middle| \ \boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{u}|_{X\in\Gamma_0} = \boldsymbol{0},\ g(\boldsymbol{u}) \geq 0 \text{ on } \Gamma_c \right\}$$

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in H^1(\Omega \times (0, T); \mathbf{R}) \middle| \ \lambda|_{t=0} = 0,\ \lambda \leq 0 \right\}. \quad \square$$

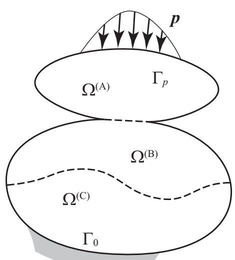
本研究では，Ω が変動すると仮定して，目標圧力 $\lambda_0 : \Gamma_c \to \mathbf{R}$ に対して，誤差ノルム $J^{(0)}$ が最小となる領域 $\Omega^\star \in \mathcal{W}$ を求める問題に取り組んだ．

$$J^{(0)}(\Omega^\star, \lambda^\star, \alpha^\star) = \min_{\Omega\in\mathcal{W}, \alpha\in\mathbf{R}} J^{(0)}(\Omega, \boldsymbol{u}, p)$$

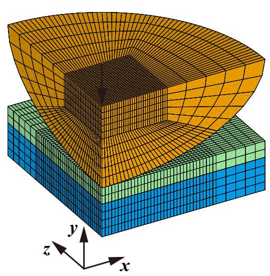
$$\text{where} \quad J^{(0)}(\Omega, \lambda, \alpha) = \int_{\Gamma_c} (\lambda - \alpha\lambda_0)^2 \, \mathrm{d}\Gamma, \quad \mathcal{W} = \left\{ \Omega \subset \mathbf{R}^d \middle| \text{ constraints for domains } \right\}.$$

この問題に対して次の結果を得た．

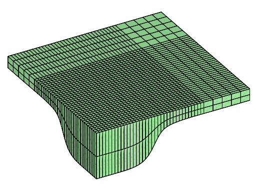
- 大変形接触する弾性問題の解と随伴問題の解を用いて $J^{(0)}$ の形状微分が評価できた．
- 形状微分が評価できたことから，H^1 勾配法を用いた有限要素法によるプログラムを開発した．
- $\lambda_0 = 1$ として，楕円体と接触する接合材料界面 $\Gamma^{(\mathrm{B})} \cap \Gamma^{(\mathrm{C})}$ の形状最適化問題をそのプログラムで解析した．その結果，$J^{(0)}$ が単調に減少し収束する結果を得た．

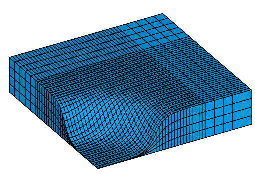


接触する弾性体



解析モデル


軟材 (B) 同定形状


硬材 (C) 同定形状