連続体の位相最適化問題における正則化解法の検討

050500066　伊藤友文

論文要旨

偏微分方程式の境界値問題が定義された領域において密度を定義して, 最適な密度分布を求める問題を位相最適化問題と呼ぶ.
この問題においては, 従来の方法では有限要素ごとに密度を与えて数値計算を行っており, 密度分布は領域全体で不連続となる L^∞ 空間の関数となっていた.
このようなアルゴリズムでは, 計算上数値的不安定に遭遇することになり, これを解消するために過去様々な対策が用いられてきた,
本研究では, 従来要素ごとであった密度分布を領域全体で平滑化し, 連続である $W^{1,\infty}$ 空間の関数で与えることによりこのような数値的不安定を解消した正則化解法を目指す.

Lipschitz 領域 $D \subset \mathbf{R}^d$ は密度 $\phi:\ D \to \mathbf{R}$ をもつ連続体とする．マクロな材料特性 $k:\ D \to \mathbf{R}$ は $k = k^H(\phi)$, $k^H:\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ と表せるとする．ϕ の許容集合 $\mathcal{W}$ を次式とする．ただし，$\phi_0 > 0$ は定数とする．

$$\mathcal{W} = \left\{ \phi \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}) \middle|\ \phi_0 \leq \phi \leq 1 \right\} \quad \square$$

この密度 $\phi:\ D \to \mathbf{R}$ について, 以下の SIMP 境界値問題が定義される.

$$-\nabla \cdot (\phi^p \nabla u) = \phi f \quad \text{in } \Omega$$
$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad \square$$

ある $\phi \in \mathcal{W}$ のとき, この問題の解を u とすると，以下のように評価関数 $J^{(0)}(\phi, u)$ を最小とする $\phi \in \mathcal{W}$ を求める SIMP 位相最適化問題が定義される.

$$\min_{\phi \in \mathcal{W}} \left\{ J^{(0)}(\phi, u) \middle|\ J(\phi, u) \leq 0 \right\} \quad \square$$

この位相最適化問題について, 境界値問題の解を u, 随伴問題の解を $v^{(l)}$ とすることで, 密度勾配 $G^{(l)}$ が計算される

$$G^{(l)} = g^{(l)}_{,\phi} - p\phi^{p-1} \nabla v^{(l)} \cdot \nabla u + f v^{(l)}$$

この密度勾配を用いて目的汎関数を最小化するアルゴリズムが定義できる
本研究ではその方法として最適性基準法を用い, プログラムを開発, 解析を行った.
片持ち梁モデルの線形弾性問題について, 外力仕事を最小化する密度分布の計算結果として以下の図を得た.

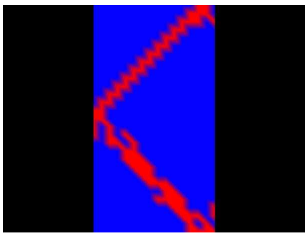

図 1: 解析結果