卒業論文 2008 年 2 月 19 日

スプライン関数を用いた有限要素法に関する基礎的研究

山本真之，情報文化学部 自然情報学科 複雑システム系, 050400525

本研究では，B スプライン関数を基底関数に用いた Ritz-Galerkin 法による微分方程式の境界値問題に対する数値解析プログラムを開発した．これまで，有限要素法では，要素内部で低次の多項式を仮定し，要素境界で連続となる基底関数を用いていた．本研究では，B スプライン関数を基底関数に用いる．その基底関数で構成された試行関数を微分方程式の境界値問題の弱形式に代入することによって基底関数の未定乗数に関する連立 1 次方程式を得る．連立 1 次方程式の数値解は通常の有限要素法ソルバーを用いて解く．プログラムの妥当性は 2 階および 4 階の常微分方程式の境界値問題に対する解析例を用いて検証した．

キーワード: 微分方程式の境界値問題, Ritz-Galerkin 法, B スプライン関数, 有限要素法, 3D-CAD

1 はじめに

3 次元空間上の形状情報を用いた 3D-CAD システムの普及により，仮想 3 次元空間上で製品設計が行われるようになってきた．しかしながら，3D-CAD モデルを用いて数値シミュレーションを行う場合，利用する解析プログラムに合わせて形状データを変換する必要がある．3D-CAD システムでは，通常，B スプライン関数や NURBS (Non-uniform rational B-spline) 関数が用いられてきたが，有限要素法では，要素境界で連続かつ要素内部で低次多項式の基底関数が使われてきた．

本研究では，3D-CAD システムで使われている B スプライン関数を基底関数とした有限要素法を開発する．この方法を用いれば，仮想 3 次元空間上で設計された形状データを用いて数値シミュレーションが行えることになる．

2 B スプライン関数

簡単のために解関数 $u(x) : (0,1) \mapsto \mathbf{R}$ を求める問題を考えよう．$K > 1$ として，$(K-1)$ 次の B スプライン関数 $B_{i,K}(x)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$ を基底関数にした試行関数 $u^h(x)$, $v^h(x)$ を次式で定義する．

$$u^h(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i B_{i,K}(x), \quad v^h(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \beta_i B_{i,K}(x) \tag{1}$$

$$B_{i,K}(x) = \frac{x - q_i}{q_{i+K-1} - q_i} B_{i,K-1}(x) + \frac{q_{i+K} - x}{q_{i+K} - q_{i+1}} B_{i+1,K-1}(x)$$
$$B_{i,1}(x) = \begin{cases} 1 & (q_i \le x < q_{i+1}) \\ 0 & (x < q_i,\ q_{i+1} < x) \end{cases} \tag{2}$$

図 1 に $K = 4$, $N = 5$ $(x_0 = 0, x_4 = 1)$ の場合を示す．x_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$ は標本点，α_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$ は制御変数を表す．本研究では，x_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$ を等間隔に配置し，節点 q_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, N+K-1)$ は

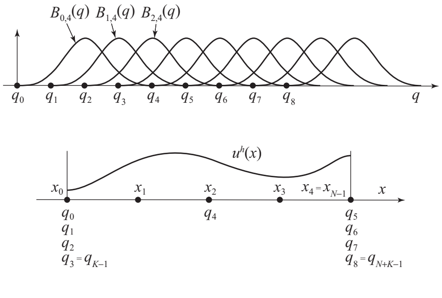

Fig. 1 3 次 $(K = 4)$ の B スプライン関数 $N = 5$ 個でつくる試行関数 $u^h(x)$

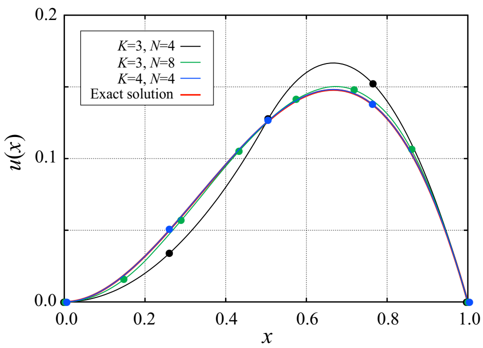

Fig. 2 4 階微分方程式境界値問題の解析例

Schoenberg-Whitney の条件 ($B_{i,K}(x)$ ごとに $B_{i,K}(x_j) > 0$ となる x_j が一つ以上存在する) を満たすように $q_0 = q_1 = \cdots = q_{K-1} = x_0$, $q_{i+k} = (x_i + x_{i+K})/2$, $q_N = q_{N+1} = \cdots = q_{N+K-1} = x_{N-1}$ とした．

3 Ritz-Galerkin 法

次のような 4 階微分方程式の境界値問題を考えよう．

$$\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4}(x) + u(x) = 0 \quad x \in (0,1) \tag{3}$$

$$u(0) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(0) = u(1) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(1) = -1 \tag{4}$$

この問題の弱形式は次式となる．

$$a(u, v) = 0 \quad \forall v \in U \tag{5}$$

$$U = \left\{ u \in H^2(0,1) \,\middle|\, u(0) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(0) = u(1) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(1) = 0 \right\} \tag{6}$$

$$a(u, v) = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} + uv \right) \mathrm{d}x \tag{7}$$

Ritz-Galerkin 法を用いれば，式 (5) の u, v に式 (1) を代入し，微分および積分公式を適用し，基本境界条件を考慮すれば，α_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$ に関する連立 1 次方程式を得る．これを通常の有限要素法ソルバーで解き，式 (1) により数値解 u^h を得る．

4 解析例

開発したプログラムを用いて，2 階および 4 階微分方程式の境界値問題を解析した．式 (3) と (4) に対する解析例を図 2 に示す．