楽器の形状最適化に関する研究

新谷浩平，複雑系科学専攻, 350604142

本研究では，放射音圧が最大化する楽器のノンパラメトリックな形状を求める問題に対する数値解法を開発した．楽器は線形弾性体，音場は楽器を取り巻く十分大きな球状の流体でモデル化した．指定した楽器の部分境界に作用させた動的外力によって楽器が振動し，その振動によって音場が発生すると仮定した．これらの現象は線形弾性方程式と Helmholz 方程式の連成問題として定式化した．音場の外側境界では無反射条件として Sommerfeld 条件を用いた．目的汎関数には，音場の外側境界と指定した周波数領域における音圧パワー積分を選んだ．制約条件には，指定した楽器の固有振動数を変えない条件と楽器の体積を減らさない条件を考慮した．楽器の形状変動に対する目的および制約汎関数に対する形状勾配は，音場構造連成問題の解と目的および制約汎関数に対する随伴問題の解を用いて計算した．形状更新には，形状勾配の不正則性を補うために力法を用いた．ギターモデルの解析例によって開発した解法の妥当性を検証した．

キーワード: 音場構造連成問題, 形状最適化, 有限要素法, 随伴変数法, 形状勾配, 力法

1 はじめに

楽器は構造と音場が連成した動的なシステムである．楽器からの放射音をシミュレーションするためには，弾性体と流体の運動方程式を連成させて解く必要がある．最近の数値解法の発展によって，このような音場構造連成問題は有限要素法などの数値解析法によって解くことが可能となってきた．本研究では，楽器からの放射音のシミュレーションを行いながら，さらに形状をノンパラメトリックに最適化する問題に対する数値解法を開発することを目的とした．

2 理論

図 1 に示すように，楽器を領域 $\Omega^s \subset \mathbf{R}^3$ に配置された線形弾性体，音場を領域 $\Omega^a \subset \mathbf{R}^3$ に配置された流体とする．弾性体は，部分境界 Γ_0 で変位が拘束され，部分境界 Γ^p に動的な境界力 $\boldsymbol{p} = \left(p^i\right)^i : \Gamma^p \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}^3$ によって振動し，その振動によって音場に音圧 $p : \Omega^a \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ を生ずると仮定する．弾性体と音場内では，それぞれ線形弾性方程式と Helmholz 方程式が成立すると仮定する．弾性体と音場の連成境界では運動量保存式，音場の外側境界 $\tilde{\Gamma}$ では無反射境界条件として Sommerfeld 条件を仮定した．

本研究では，弾性体の振動固有値 $\lambda^{(r_l)2}$ (固有振動数の 2 乗) と体積を制約した下で，$\tilde{\Gamma}$ 上放射音圧パワー積分 $(\hat{p}, \hat{p}^*)_{L^2(\tilde{\Gamma})}$ の周波数領域 (ω_1, ω_2) 積分を最大化させる問題に取り組んだ

$$\min_{\Omega^s \subset \tilde{\Omega}} \int_{\omega_1}^{\omega_2} -(\hat{p}, \hat{p}^*)_{L^2(\tilde{\Gamma})} \, \mathrm{d}\omega \quad \text{such that}$$

$$\lambda^{(r_l)2} - \lambda_0^{(r_l)2} = 0 \ (l = 1, 2, \cdots, n_r) \text{ and } \int_{\Omega^s} \mathrm{d}\Omega - m_0 \geq 0$$

$\hat{p}$ は p の Fourier 積分，$(\cdot)^*$ は複素共役を示す．$\lambda_0^{(r_l)}, m_0$ は定数である．

目的および制約汎関数の形状勾配の評価式は，随伴変数法と Lagrange 乗数法によって導出した．形状更新には，形状勾配の不正則性を補うために力法を用いた．プログラムは研究室で開発されてきた有限要素法ライブラリと公開されているソルバーを用いて独自に開発した．

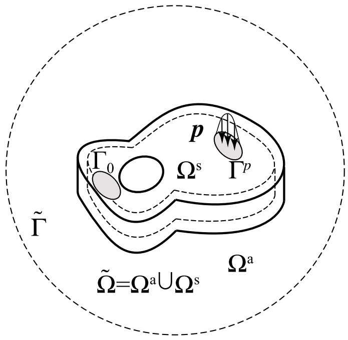

Fig. 1 ギターモデル

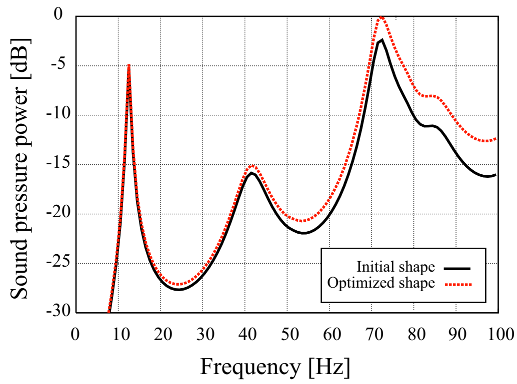

Fig. 2 音圧パワーの周波数応答

3 解析例

解法の妥当性を検証するために，図 1 のようなギターモデルの解析を行った．楽器は木製，音場は空気の材料定数を用いた．$(\omega_1/2, \omega_2/2) = (0, 100)$ [Hz] とした．楽器の 1 次固有振動数 (12.5[Hz]) を制約した．有限要素モデルは，楽器および音場とも四面体 2 次要素を用いた (要素数 8499，節点数 11529)．図 2 に最適化前後の音圧パワーの周波数応答を示す．また，形状変動に伴って，制約を満たしながら音圧パワー積分が単調に増加し収束する結果を得た．