

# 連続体の位相最適化問題に関する平滑化勾配法

野々川 舞，複雑系科学専攻，350604223

本研究では，連続体のノンパラメトリックな位相最適化問題に対する数値解法を開発した．連続体の位相最適化問題は連続体の領域に最適な孔配置を求める問題として知られている．この問題では，物質の有無を 0,1 で対応付けた特性関数を設計変数に選ばば解が得られないことが知られている．そこで，特性関数の代わりに中間値を許容した密度関数で問題を定式化し，有限要素法と最適化法を利用して解くことが行われてきた．特に，特性関数を密度のべき乗で置き換える SIMP 法が広く使われてきた．しかしながら，有限要素法による数値解がチェッカーボード状に振動する，あるいはメッシュに依存するなどの数値不安定現象が発生することが問題とされてきた．本研究では，その原因が密度勾配の不正則性によることを示し，それを補完する適切な関数空間における勾配法に基づく解法を用いれば，克服可能であることを示す．解法の妥当性を弾性体の解析例により確認する．

キーワード: 位相最適化, 密度法, SIMP 法, 密度勾配, 正則性,  $H^1$  勾配法, 逐次 2 次計画法, 主双対内点法

## 1 はじめに

偏微分方程式の境界値問題が定義された領域の最適な孔配置を求める問題は，連続体の位相最適化問題と呼ばれている．この問題を，物質の有無を 0,1 で対応付けた特性関数の集合で定式化した場合，その集合がコンパクトでないことから，解の存在が保障されなかった．そこで，0,1 条件を緩和して，均質化法を用いてマイクロ構造のパラメータを設計変数に選ぶ方法や，特性関数を密度のべき乗で置き換える SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 法により，最適な物質配置問題に置き換えて，その問題を有限要素法と最適化法を利用して解くことが行われてきた．

しかしながら，有限要素法により設計変数を要素単位で離散化した問題を勾配法で解析すると，設計変数がチェッカーボード状に振動する，あるいはメッシュに依存するなどの数値不安定現象が発生することが知られてきた．

本研究では，これらの数値不安定現象の原因を明らかにし，滑らかさを補完する機能を有する適切な関数空間の勾配法 ( $H^1$  勾配法) を提案する．

## 2 理論と方法

有界領域  $\Omega \in \mathbf{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) 上の密度  $\rho \in \mathcal{W}$  とする．許容集合  $\mathcal{W}$  は，正定数  $M$  と小さな正定数  $\underline{\rho} > 0$  に対して，次式で定義する．

$$\mathcal{W} = \left\{ \rho \in H^1(\Omega) \mid \underline{\rho} \leq \rho \leq 1, \|\rho\|_{H^1} \leq M \right\} \quad (1)$$

SIMP 法に従い，偏微分方程式の係数に  $\rho^p$  が乗じられていると仮定する．本研究では，べき指数  $p$  は次式を満たすと仮定する．

$$1 \leq p < \frac{2d}{d-2} \quad (2)$$

このときの境界値問題の解  $u \in U$  として，目的汎関数  $J^{[0]}(\rho, u)$  と制約汎関数  $J^{[l]}(\rho, u)$  ( $l = 1, 2, \dots, m$ ) を次式で定義する．

$$J^{[l]}(\rho, u) = \int_{\Omega} g^{[l]}(\rho, u) \, d\Omega \quad (3)$$

SIMP 法による位相最適化問題を次式で定義する．

$$\min_{(\rho, u) \in \mathcal{W} \times U} \left\{ J^{[0]}(\rho, u) \mid J^{[l]}(\rho, u) \leq 0 \ (l = 1, 2, \dots, m) \right\} \quad (4)$$

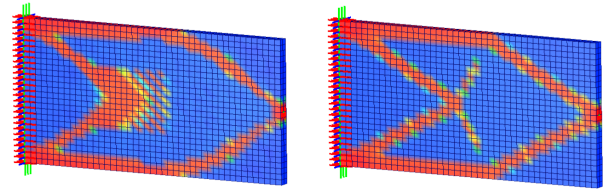


Fig. 1 SIMP 位相最適化問題の解析例

このとき， $\rho_n \rightarrow \rho_0 \in \mathcal{W}$  に対して  $u_n \rightarrow u_0 \in U$  が示せる．また，密度変動に対する  $J^{[l]}(\rho, u)$  の勾配 (密度勾配)  $G_{\rho}^{[l]}$  ( $l = 0, 1, 2, \dots, m$ ) の評価式を随伴変数法で示せる．数値不安定現象の原因は， $G_{\rho}^{[l]} \notin H^1(\Omega)$  によって説明できる．

本研究では，適切な関数空間の勾配法を適用することで， $G_{\rho}^{[l]}$  から正則な密度変動を求める方法を提案する．密度の許容集合  $\mathcal{W}$  は  $H^1(\Omega)$  に属することから， $H^1(\Omega)$  における勾配法 ( $H^1$  勾配法) を提案する． $H^1$  勾配法では， $G_{\rho}^{[l]}$  を既知として， $J^{[l]}(\rho, u)$  が減少する密度変動  $\hat{\rho}^{[l]} \in H^1(\Omega)$  ( $l = 0, 1, 2, \dots, m$ ) を次の弱形式より求める．

$$b_{H^1(\Omega)}(\hat{\rho}^{[l]}, y) = - \left( G_{\rho}^{[l]}, y \right)_{L^2(\Omega)} \quad \forall y \in H^1(\Omega) \quad (5)$$

ただし， $b_{H^1(\Omega)}(\cdot, \cdot)$  は， $H^1(\Omega)$  における強圧的な双 1 次形式である．

本研究では，式 (5) を有限要素法で解析するプログラムを開発した．汎関数制約には逐次 2 次計画法，密度制約  $\underline{\rho} \leq \rho \leq 1$  にはペナルティ法や主双対内点法を用いた．

## 3 解析例

線形弾性問題の解析例を図 1 に示す．左端面固定，右端面中央に下向きの集中力が作用する境界条件を仮定した．目的汎関数  $J^{[0]}(\rho, u)$  には平均コンプライアンスを，制約汎関数  $J^{[1]}(\rho)$  には質量の制約値からの増分を選んだ．質量の制約値は領域全体で  $\rho = 1$  となった場合の 35% とした．図 1 において， $L^2$  勾配法は式 (5) における  $b_{H^1(\Omega)}(\cdot, \cdot)$  を  $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$  に置き換えた場合， $H^1$  勾配法は  $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)}$  に置き換えた場合である． $L^2$  勾配法では数値不安定現象が観察されるが， $H^1$  勾配法ではそれが抑制されている．