

安定化を考慮した流体構造連成問題における形状最適化

谷口 肇，複雑系科学専攻，350504202

本論文は，流体と構造の連成問題を対象としたノンパラメトリック形状最適化問題に対して安定化手法を取り入れた場合の解法を示す．これまで，浜崎は，非圧縮性粘性流体と弾性体の連成問題についてのノンパラメトリック形状最適化問題を定式化し，形状勾配を用いた力法による解法を示し，低レイノルズ数の問題であればその解法は機能することを示した．本研究では，SUPG法を用いた場合形状最適化問題の定式化と形状勾配の評価方法を示す．

キーワード: 形状最適化, 流体構造連成問題, 有限要素法, SUPG, 随伴変数法, 形状勾配, 力法

1 はじめに

流体と構造が相互に影響を及ぼし合う流体構造連成問題の解法は，循環器系のような生体の挙動や流れ場に置かれた柔軟な人工物の挙動をシミュレーションするために開発されてきた．最近になって，流体構造連成問題におけるノンパラメトリック形状最適化問題を解く試みも始められた．浜崎は，2005年度の修士論文において，非圧縮性粘性流体と弾性体の連成問題についての形状最適化問題を定式化して，形状勾配を用いた関数空間の勾配法（力法）による解法を示した．その解法は低レイノルズ数の問題であれば機能することが確かめられた．本研究では，流れ場の安定化手法の一つである SUPG(Streamline Upwind / Petrov-Galerkin) 法を用いることでより高レイノルズ数の問題に対しても解くことができるようにすることを目標とした．

2 流体・構造連成問題

図1のような流れ場に置かれた弾性体を考えよう．流れ場と弾性体の領域は，それぞれ $\Omega^f, \Omega^s \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ ，それらの境界を Γ^f, Γ^s と定義する．流体は非圧縮性を仮定し，弾性体は Saint Venant 弾性体を仮定する．弾性体は Γ_0^s で変位が拘束されていると仮定し，流れ場は，外側部分境界 Γ_0^f では規定流速 $\mathbf{u}_\Gamma^f = \{\mathbf{u}_{\Gamma_i}^f\}_{i=1}^d$ が与えられ，それ以外の外側部分境界 $\Gamma^f \setminus (\Gamma^s \cup \Gamma_0^f)$ では流れ場の応力が零と仮定する．

この流体・構造連成問題の弱形式は，変位 \mathbf{u} と圧力 p に対する運動方程式と連続の式に任意の随伴変位 \mathbf{v} と随伴圧力 q を乗じて $\Omega^f \cup \Omega^s$ で積分し，境界条件と初期条件を考慮することによって得られる．本研究では，流れ場の弱形式に対して，多次元の場合の SUPG 安定化項，微圧縮性項およびペナルティ項を付加した．

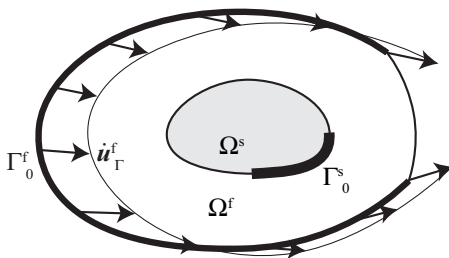


Fig. 1 Fluid-structure interaction system

3 散逸エネルギー最小化問題

流体・構造連成問題の形状最適化の例として，流れ場に置かれた弾性体の形状を変化させて，流れ場の散逸エネルギーを最小化する問題を考えてみよう．流れ場の外側境界 $\Gamma^f \setminus \Gamma^s$ と弾性体の変位拘束部分境界 Γ_0^s は固定するものとする．このような条件を満たす領域変動速度 $\mathbf{V} = \{V_i\}_{i=1}^d$ の許容集合を D とする．また，弾性体の体積は零に向かう可能性があることから，弾性体の体積を下限值 m_0 以上に制限する．SUPG 安定化法，微圧縮性項およびペナルティ項を考慮した場合の形状最適化問題は次のように表すことができる．

$$J \equiv \int_0^T \int_{\Omega^f} 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^f(\mathbf{u}_{,t}^f) \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^f(\mathbf{v}_{,t}^f) d\Omega dt \quad (1)$$

ただし，流れ場において，応力 $\sigma_{ij}^f(p, \mathbf{u}_{,t}^f) = -p\delta_{ij} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^f(\mathbf{u}_{,t}^f)$ ， μ は粘性係数，ひずみは $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^f(\mathbf{u}^f) = (u_{i,j}^f + u_{j,i}^f)/2$ である． $(\cdot)_{,t} \equiv \partial(\cdot)/\partial t$ は時間微分を表す．

領域変動 $\mathbf{V} \in D$ のときの目的汎関数の物質導関数は，流体・構造連成問題の弱形式と式(1)の物質導関数を用いて定義される随伴問題の解 \mathbf{v}, q を用いれば，最終的に次のような形式で表せる．

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \int_0^T \left\{ \int_{\Gamma^f} G^f n_i^f V_i d\Gamma + \int_{\Gamma^s} (G^s + G^{af}) n_i^f V_i d\Gamma \right\} dt \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma^s} G_J n_i^f V_i d\Gamma d\omega \end{aligned} \quad (2)$$

$\mathbf{n}^m = \{n_i^m\}_{i=1}^d$ は $\Omega^m (m = f, s)$ の境界における外向き単位法線である． $G_J \mathbf{n}^s$ は散逸エネルギーに対する形状勾配である．

弾性体の体積に対する形状勾配密度は $G_\Lambda = -1$ である．したがって，目的汎関数と制約汎関数の形状勾配 $G_J \mathbf{n}^s, G_\Lambda \mathbf{n}^s$ を有限要素法によって計算すれば，最適化に向う形状更新は Lagrange 乗数法と関数空間の勾配法である力法によって解析できることになる．

本研究では，そのプログラムを開発し，一様流れ場に置かれた非圧縮性粘性流体の2次元定常流れ場の中に2次元弾性体が置かれたモデルに対する解析例により解法の妥当性を確認した．