博士課程（前期）論文要旨，2007 年 1 月 31 日

接触する弾性体の形状最適化に関する研究

杉本明信，複雑系科学専攻，350504148

本論文は，接触する弾性体に関するノンパラメトリック形状最適化問題の解法を示す．一方の弾性体は異なる材料を接合した弾性体であると仮定し，外力が作用した別の弾性体との接触によって変形すると仮定する．目的は，指定した接触境界の接触応力が指定した分布となるようにその接合境界を決定することである．これまで，小山は，与えられた外力に対して指定した境界で望みの変形が生じるように接合境界形状最適化問題を定式化し，形状勾配を用いた力法による解法を示した．本研究では，外力が別の弾性体との幾何学的非線形性を考慮した弾性接触によって与えられると仮定する．

キーワード: 形状最適化, 接触問題, 幾何学的非線形性, 有限要素法, 随伴変数法, 形状勾配, 力法

1　はじめに

靴や装具など人体と接触する製品の設計においては，接触応力が適切な分布となるような形状設計手法の開発が求められている．本研究では，接触応力を適切な分布に近づけるような形状最適化問題を数理的に記述して，その解法を開発することを目的とした．

2　接触と接合を伴う弾性変形

靴を想定して，図 1 に示すような，異種材料の接合によってつくられた弾性体が別の弾性体との滑り接触によって変形する問題を考えよう．$m, n = \mathrm{A,B,C}$ は材料を表すことにして，$\Omega^m \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ と Γ^m をそれぞれ弾性体の領域とその境界とし，Γ^m_n を Ω^n と接合あるいは接触する Ω^m 上の部分境界とする．$\Gamma^\mathrm{A}_\mathrm{B} = \Gamma^\mathrm{B}_\mathrm{A}$ は接触境界，$\Gamma^\mathrm{B}_\mathrm{C} = \Gamma^\mathrm{C}_\mathrm{B}$ は接合境界とする．

弾性体 C の部分境界 Γ_0 では変位がゼロに拘束され，弾性体 A の部分境界 Γ^P にはゼロではない境界力 $\boldsymbol{P} = \{P_i\}^d_{i=1}$ が作用したとき，弾性体は $\Omega^\mathrm{A} \cup \Omega^\mathrm{B} \cup \Omega^\mathrm{C}$ 上で変位 $\boldsymbol{u} = \{u_i\}^d_{i=1}$ で変形すると仮定する．このときの大変形後の釣合方程式は Lagrange 表示の変分形式で次のように示せる．

$$a^\mathrm{A}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + a^\mathrm{B}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + a^\mathrm{C}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - h^\mathrm{A}_\mathrm{B}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - h^\mathrm{B}_\mathrm{A}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - h^\mathrm{B}_\mathrm{C}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - h^\mathrm{C}_\mathrm{B}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = l(\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in U \tag{1}$$

$$a^m(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_{\Omega^m} S_{ij}(\boldsymbol{u})\,\delta E_{ij}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\Omega \tag{2}$$

$$h^m_n(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma^m_n} \Pi_{ji}(\boldsymbol{u})\,N_j v_i\,\mathrm{d}\Gamma, \quad l(\boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma^P} P_i v_i\,\mathrm{d}\Gamma \tag{3}$$

弾性体は Saint Venant 弾性体と仮定し，$\{\Pi_{ij}(\boldsymbol{u})\}^d_{i,j=1}$, $\{S_{ij}(\boldsymbol{u})\}^d_{i,j=1}$, $\{E_{ij}(\boldsymbol{u})\}^d_{i,j=1}$, $\{C_{ijkl}\}^d_{i,j,k,l=1}$ をそれぞれ第 1 Piola-Kirchhoff 応力，第 2 Piola-Kirchhoff 応力，Green-Lagrange ひずみ，剛性とする．$\delta(\cdot)$ は変分差要素の意味で用いる．$\boldsymbol{N}^m = \{N^m_i\}^d_{i=1}$ $(m = \mathrm{A,B,C})$ は，領域 Ω^m の初期配置における外向き単位法線を表す．U は基本境界条件を満たす変位の許容集合である．

3　接触応力規定問題

接触境界 $\Gamma^\mathrm{A}_\mathrm{B}$ 上の接触応力 $\{S^\mathrm{A}_{ij}(\boldsymbol{u})\,N^\mathrm{A}_j\}^d_{i=1}$ を望みの応力 $\{\bar{S}^\mathrm{A}_{Ni}\}^d_{i=1}$ に近づける問題を考えよう．この問題は，$\Gamma^\mathrm{B}_\mathrm{C}$ を変化させた場合の次の汎関数 $J(\boldsymbol{u})$ を最小化する問題として記述できる．

$$J(\boldsymbol{u}) \equiv \int_{\Gamma^\mathrm{A}_\mathrm{B}} \left(S^\mathrm{A}_{ij}N^\mathrm{A}_j - \alpha\bar{S}^\mathrm{A}_{Ni}\right)\left(S^\mathrm{A}_{ij}N^\mathrm{A}_j - \alpha\bar{S}^\mathrm{A}_{Ni}\right)\mathrm{d}\Gamma \tag{4}$$

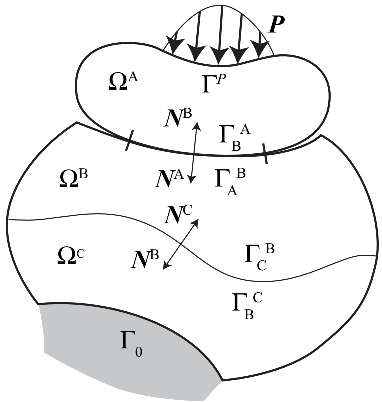

Fig. 1 Contacting elastic continua

$\alpha \in \mathbb{R}$ は接触応力 $\{\bar{S}^\mathrm{A}_{Ni}\}^d_{i=1}$ の大きさを任意にするために導入された任意定数である．本研究では，特異性を生じないように，接合弾性体の境界 $\partial\left(\Omega^\mathrm{B} \cup \Omega^\mathrm{C}\right)$ は滑らかであると仮定し，接合境界 $\Gamma^\mathrm{B}_\mathrm{C}$ は $\partial\left(\Omega^\mathrm{B} \cup \Omega^\mathrm{C}\right)$ と直交したまま変動すると仮定する．このような条件を満たす領域変動速度 $\boldsymbol{V} = \{V_i\}^d_{i=1}$ の許容集合を D とする．

このような接合境界 $\Gamma^\mathrm{B}_\mathrm{C}$ の変動 $\boldsymbol{V} \in D$ に対する Karush-Kuhn-Tucker 条件を求めると，α に対して次式を得る．

$$\alpha = \int_{\Gamma^\mathrm{A}_\mathrm{B}} S^\mathrm{A}_{ij}N^\mathrm{A}_j\bar{S}^\mathrm{A}_{Ni}\,\mathrm{d}\Gamma \Big/ \int_{\Gamma^\mathrm{A}_\mathrm{B}} \bar{S}^\mathrm{A}_{Ni}\bar{S}^\mathrm{A}_{Ni}\,\mathrm{d}\Gamma \tag{5}$$

また，領域変動 $\boldsymbol{V} \in D$ のときの式 (1) と式 (4) の物質導関数を用いて定義される随伴問題の解 $\boldsymbol{v} \in U$ を用いれば，目的汎関数の物質導関数は次のように表せる．

$$\dot{J} = \int_{\Gamma^\mathrm{B}_\mathrm{C}} G^\mathrm{B}_\mathrm{C} N^\mathrm{B}_i V_i\,\mathrm{d}\Gamma \tag{6}$$

$$G^\mathrm{B}_\mathrm{C} = -\left(S^\mathrm{B}_{ij}(\boldsymbol{u})\,\delta E^\mathrm{B}_{ij}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - S^\mathrm{C}_{ij}(\boldsymbol{u})\,\delta E^\mathrm{C}_{ij}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\right) + \Pi^\mathrm{B}_{ji}(\boldsymbol{u})\,N^\mathrm{B}_j\left(v^\mathrm{B}_{i,k}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - v^\mathrm{C}_{i,k}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\right)N^\mathrm{B}_k \tag{7}$$

$G^\mathrm{B}_\mathrm{C}\boldsymbol{N}^\mathrm{B}$ は接触境界における応力 2 乗誤差積分に対する接合境界 $\Gamma^\mathrm{B}_\mathrm{C}$ における形状勾配となっている．

目的汎関数の形状勾配を有限要素法によって計算すれば，最適化に向う形状更新は Lagrange 乗数法と関数空間の勾配法である力法によって解析できることになる．

本研究では，そのプログラムを開発し，楕円体が接合弾性体に接触した場合の接触応力を均一化する問題を解析し，解法の妥当性を確認した．