

接触する弾性体の形状最適化

Shape Optimization of Contacting Elastic Continua

杉本 明信 (名大院) 笹岡 竜 (名大院) 竹内 謙善 (くいんと) 畔上 秀幸 (名大院)

Akinobu SUGIMOTO, Graduate School of Information Science, Nagoya University

Ryu SASAOKA, Graduate School of Information Science, Nagoya University

Kenzen TAKEUCHI, Quint Corporation

Hideyuki AZEGAMI, Graduate School of Information Science, Nagoya University

FAX: 052-789-4801, E-mail: sugimoto@az.cs.is.nagoya-u.ac.jp

This paper presents a solution of a non-parametric shape optimization problem for contacting elastic continua. We assume that one of the elastic continua is made of different materials and deforms by elastic contact with other elastic continuum. An objective is to determine the shape of the joint boundary to accord a distribution of contact stress with a desired one on an assigned contact sub-boundary. In the previous study, the authors presented a formulation of joint boundary shape optimization problem to accord a deformation with a desired one under a given external force and solution using the shape gradient by the traction method. In this study, we assume that the external force is given by elastic contact with other elastic continuum considering geometrical non-linearity and present an evaluation of the shape gradient for the joint boundary shape optimization problem to minimize an integral of the squared error between contact stress and a desired stress on an assigned sub-boundary.

1. はじめに

靴や装具など人体と接触する製品の設計においては接触応力を適切に制御することが望まれている。著者らは、異なる材料を接合した弾性体に対して、与えられた外力の下で、指定した境界で望みの変形が生じるように接合境界の形状を最適化する問題を定式化し、形状勾配を用いた力法による解法を示した⁽¹⁾。本研究では、幾何学的非線形性を考慮した弾性接触を想定して、接触応力が指定した分布となるような接合境界の形状最適化問題を定式化し、形状勾配の評価方法を示す。

2. 接触と接合を伴う弾性変形問題

図 1 に示すような、異種材料の接合によってつくられた弾性体が別の弾性体との弾性接触によって変形する問題を考えよう。 $m, n = A, B, C$ は材料を表すことにして、弾性体の領域を $\Omega^m \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$)、その境界を Γ^m 、 Ω^n と接合あるいは接触する Ω^m 上部分境界を Γ_n^m のように表す。 $\Gamma_B^A = \Gamma_A^B$ は接触境界、 $\Gamma_C^B = \Gamma_B^C$ は接合境界とする。接触境界では摩擦力は生じないと仮定する。

弾性体 C の部分境界 Γ_0 では変位がゼロに拘束され、弾性体 A の部分境界 Γ^P にはゼロではない境界力 $\mathbf{P} = \{P_i\}_{i=1}^d$ が作用すると仮定する。このときの変位を $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^d$ と表すと、大変形後の釣合方程式は初期配置の変分形式で次のように示せる。

$$a^A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a^B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a^C(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - h_B^A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - h_A^B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - h_C^B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - h_B^C(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in U \quad (1)$$

ただし、 $m, n = A, B, C$ として、

$$a^m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^m} S_{ij}(\mathbf{u}) \delta E_{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \, d\Omega \quad (2)$$

$$h_n^m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_n^m} \Pi_{ji}(\mathbf{u}) N_j v_i \, d\Gamma \quad (3)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma^P} P_i v_i \, d\Gamma \quad (4)$$

被積分項の変数に関しては、定義領域を明示する必要がある場合のみ上付きを付けることにする。弾性体は Saint Venant

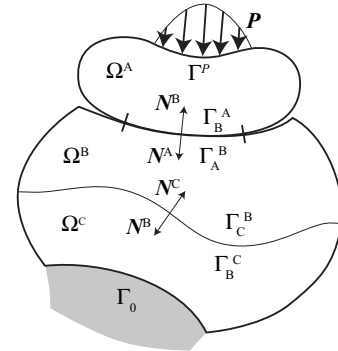


Fig. 1 Contacting elastic continua

弾性体と仮定し、第 1 Piola-Kirchhoff 応力 $\{\Pi_{ij}(\mathbf{u})\}_{i,j=1}^d$ 、第 2 Piola-Kirchhoff 応力 $\{S_{ij}(\mathbf{u})\}_{i,j=1}^d$ 、Green-Lagrange ひずみ $\{E_{ij}(\mathbf{u})\}_{i,j=1}^d$ 、剛性 $\{C_{ijkl}\}_{i,j,k,l=1}^d$ を次のように定義する。なお、 \mathbf{v} は変位の変分 $\delta \mathbf{u}$ の意味で用いる。

$$\Pi_{ij}(\mathbf{u}) = S_{ik}(\mathbf{u}) F_{jk}(\mathbf{u}) \quad (5)$$

$$S_{ij}(\mathbf{u}) = C_{ijkl} E_{kl}(\mathbf{u}) \quad (6)$$

$$E_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (F_{ki}(\mathbf{u}) F_{kj}(\mathbf{u}) - \delta_{ij}) \quad (7)$$

$$= E_{ij}^L(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} E_{ij}^{NL}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (8)$$

$$\delta E_{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\delta F_{ki}(\mathbf{v}) F_{kj}(\mathbf{u}) + F_{ki}(\mathbf{u}) \delta F_{kj}(\mathbf{v})) \quad (9)$$

$$= E_{ij}^L(\mathbf{v}) + E_{ij}^{NL}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (10)$$

$$F_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}, \quad \delta F_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial X_j} \quad (11)$$

$$E_{ij}^L(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (12)$$

$$E_{ij}^{NL}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial v_k}{\partial X_j} \right) \quad (13)$$

$\{X_i\}_{i=1}^d$ は初期配置の座標、添え字に対して $(\cdot)_{,i} \equiv \partial(\cdot)/\partial X_i$ お

よび総和規約を用いる． $\{\delta_{ij}\}_{i,j=1}^d$ は Kronecker のデルタである． $N^m = \{N_{ij}^m\}_{i,j=1}^d$ ($m = A, B, C$) は，領域 Ω^m の初期配置における外向き単位法線を表す．変位の許容集合 U は次のように定義する．

$$U = \left\{ \mathbf{u} \in \left(H^1 \left(\bigcup_{m=A,B,C} \Omega^m \right) \right)^d \mid \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_0 \right\} \quad (14)$$

3. 接合境界を設計対象とした接触境界の応力規定問題

異なる材料の接合境界 Γ_C^B を変動させて，接触境界 Γ_B^A 上の接触応力 $\{S_{ij}^A(\mathbf{u})N_j^A\}_{i=1}^d$ を望みの応力 $\{\bar{S}_{Ni}\}_{i=1}^d$ に近づける問題は，次のように表せる．

$$\min_{\Gamma_C^B, \alpha \in \mathbb{R}} \left\{ J(\mathbf{u}) \equiv \int_{\Gamma_B^A} \left(S_{ij}^A N_j^A - \alpha \bar{S}_{Ni}^A \right) \left(S_{ij}^A N_j^A - \alpha \bar{S}_{Ni}^A \right) d\Gamma \right\} \\ \text{such that Eq. (1)} \quad (15)$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ は接触応力 $\{\bar{S}_{Ni}\}_{i=1}^d$ の大きさを任意にするために導入された任意定数である． $\alpha = 0$ と固定した場合には，接触応力の最小化問題となる．本研究では，特異性を生じないように，接合弾性体の境界 $\partial(\Omega^B \cup \Omega^C)$ は滑らかであると仮定し，接合境界 Γ_C^B は $\partial(\Omega^B \cup \Omega^C)$ と直交したまま変動すると仮定する．このような条件を満たす領域変動速度 $V = \{V_{ij}\}_{i=1}^d$ の許容集合を D とする．

このような接合境界 Γ_C^B の変動 $V \in D$ に対する目的汎関数 $J(\mathbf{u})$ の物質導関数 J は次式となる．

$$J = 2 \int_{\Gamma_B^A} \left(S_{ij}^A N_j^A - \alpha \bar{S}_{Ni}^A \right) S_{ij}^A N_j^A d\Gamma \\ - 2\alpha \int_{\Gamma_B^A} \left(S_{ij}^A N_j^A - \alpha \bar{S}_{Ni}^A \right) \bar{S}_{Ni}^A d\Gamma \quad (16)$$

(\cdot) は物質導関数， $(\cdot)' = (\cdot) - (\cdot)_{,i} V_i$ は形状導関数を表す． α は，式 (16) が任意の α に対してゼロとなる条件より，次式で決定できる．

$$\alpha = \int_{\Gamma_B^A} S_{ij}^A N_j^A \bar{S}_{Ni}^A d\Gamma \Big/ \int_{\Gamma_B^A} \bar{S}_{Ni}^A \bar{S}_{Ni}^A d\Gamma \quad (17)$$

原問題の変分形式 (1) について，領域変動 $V \in D$ のときの物質導関数を求めると次式となる．

$$a^{A'}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a^{B'}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a^{C'}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ - h^{BA'}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - h^{BA'}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - h^{BC'}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - h^{CB'}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - l'(\mathbf{v}) \\ = \int_{\Gamma_C^B} \left(G^B N_i^B + G^C N_i^C \right) V_i d\Gamma \quad (18)$$

ただし，

$$G^B = -S_{ij}^B(\mathbf{u}) \delta E_{ij}^B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \left(\Pi_{ji}^B N_j^B(\mathbf{u}) v_i^B \right)_k N_k^B \\ + \left(\Pi_{ji}^B(\mathbf{u}) v_i^B \right) K^B \quad (19)$$

$$G^C = -S_{ij}^C(\mathbf{u}) \delta E_{ij}^C(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \left(\Pi_{ji}^C N_j^C(\mathbf{u}) v_i^C \right)_k N_k^C \\ + \left(\Pi_{ji}^C(\mathbf{u}) v_i^C \right) K^C \quad (20)$$

$m = A, B, C$ に対して，

$$a^{m'}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \check{a}^m(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}) + a^m(\mathbf{u}, \mathbf{v}') \quad (21)$$

$$h^{m'}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \check{h}^m(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}) + h^m(\mathbf{u}, \mathbf{v}') \quad (22)$$

$$\check{a}^m(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}) = \int_{\Omega^m} \left(S'_{ij}(\mathbf{u}) \delta E_{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right. \\ \left. + S_{ij}(\mathbf{u}) F'_{ki}(\mathbf{u}) \delta F_{kj}(\mathbf{v}) \right) d\Omega \quad (23)$$

$$\check{h}^m(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}) = \int_{\Gamma^m} \Pi'_{ji}(\mathbf{u}) N_j v_i d\Gamma \quad (24)$$

$$S'_{ij}(\mathbf{u}) = C_{ijkl} E'_{kl}(\mathbf{u}) \quad (25)$$

$$\Pi'_{ij}(\mathbf{u}) = S'_{ik}(\mathbf{u}) F_{jk}(\mathbf{u}) + S_{ik}(\mathbf{u}) F'_{jk}(\mathbf{u}) \quad (26)$$

$$E'_{ij}(\mathbf{u}) = E_{ij}^L(\mathbf{u}') + E_{ij}^{NL}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \quad (27)$$

$$\delta E'_{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \delta E_{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{v}') + \frac{1}{2} \left(\delta F_{ki}(\mathbf{v}) F'_{kj}(\mathbf{u}) + F'_{ki}(\mathbf{u}) \delta F_{kj}(\mathbf{v}) \right) \\ = E_{ij}^L(\mathbf{v}') + E_{ij}^{NL}(\mathbf{u}', \mathbf{v}) + E_{ij}^{NL}(\mathbf{u}, \mathbf{v}') \quad (28)$$

$$F'_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{\partial u'_i}{\partial X_j} = \delta F_{ij}(\mathbf{u}') \quad (29)$$

$$\delta F'_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v'_i}{\partial X_j} = \delta F_{ij}(\mathbf{v}') \quad (30)$$

K^m ($m = B, C$) は領域 Ω^m の初期配置における平均曲率の $d-1$ 倍である．さらに，次の関係を用いれば，

$$N_i^B = -N_i^C, \quad K^B = -K^C, \quad v_i^B = v_i^C, \quad \Pi_{ji}^B N_j^B = -\Pi_{ji}^C N_j^C \quad (31)$$

式 (18) の右辺は次のように表せる．

$$\int_{\Gamma_C^B} \left(G^B N_i^B + G^C N_i^C \right) V_i d\Gamma = \int_{\Gamma_C^B} G_C^B N_i^B V_i d\Gamma \\ \equiv \langle G_C^B N^B, V \rangle_{\Gamma_C^B} \quad (32)$$

$$G_C^B = - \left(S_{ij}^B(\mathbf{u}) \delta E_{ij}^B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - S_{ij}^C(\mathbf{u}) \delta E_{ij}^C(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right) \\ + \Pi_{ji}^B(\mathbf{u}) N_j^B \left(v_{i,k}^B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - v_{i,k}^C(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right) N_k^B \quad (33)$$

さらに，式 (18) において， \mathbf{u} が原問題の解であることを考慮して，式 (32) を用いれば，次式を得る．

$$\check{a}^A(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}) + \check{a}^B(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}) + \check{a}^C(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}) \\ - \check{h}_B^A(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}) - \check{h}_A^B(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}) - \check{h}_C^B(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}) - \check{h}_B^C(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}) \\ = \langle G_C^B N^B, V \rangle_{\Gamma_C^B} \quad \forall \mathbf{u}' \in U \quad (34)$$

ここで，随伴問題を次式で定義する．

$$\text{Left part of Eq.(34)} \\ = 2 \int_{\Gamma_C^B} \left\{ \left(S_{ij}^A N_j^A - \alpha \bar{S}_{Ni}^A \right) S_{ij}^A N_j^A d\Gamma \right\} \quad \forall \mathbf{u}' \in U \quad (35)$$

この問題の解 $\mathbf{v} \in U$ を用いれば，式 (16) の右辺第 1 項は式 (35) の左辺，すなわち，式 (34) において，式 (35) の解 $\mathbf{v} \in U$ を代入したときの右辺と等しい．さらに， α を式 (17) を満たすように決定していれば，式 (16) は次のように表せる．

$$J = \langle G_C^B N^B, V \rangle_{\Gamma_C^B} \quad (36)$$

$G_C^B N^B$ は接触境界における応力 2 乗誤差積分に対する接合境界 Γ_C^B における形状勾配となっている．

目的汎関数の形状勾配が計算されれば，最適化に向う形状更新は力法によって解析できる．

文献

- (1) 畔上秀幸, 小山悟. 規定した変形を生む異種材料境界面の形状設計. 日本機械学会第 18 回計算力学講演会講演論文集, pp. 331–332, 11 2005.