

Shunsuke SHIBATA, Graduate School of Information Science, Nagoya University, A4-2(780) Furocho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8601

Hideyuki AZEGAMI, Graduate School of Information Science, Nagoya University

Key Words: Medical engineering, Computational biomechanics, Scoliosis, Optimum design, Density optimization, H1 gradient method

1 はじめに

数値解析による病理解明は、通常、仮説に基づいて行われる。しかし、仮説に基づく解析では疾患が再現されない場合、正常モデルから疾患モデルへの写像を求めて、写像の解析により、疾患の要因を探ることも有効であると考えられる。

これまで、著者らは、特発性側弯症の成因解明を目指して、椎体の成長に伴う座屈現象に注目し、脊柱有限要素モデルを用いた数値解析により、座屈現象の可能性を探ってきた⁽¹⁾。しかしながら、未だ数値シミュレーションによる完全な解明には至っていない。

そこで、本研究では、正常モデルから疾患モデルへの写像を求めることによって特発性側弯症の成因を探ることを目指す。そのために、正常な脊柱有限要素モデルを X 線 CT 画像から得られる骨境界の形状に適合するように変形させる方法を提案する。

その方法は、2つの最適化問題を解くステップで構成される。ステップ1では、有限要素モデルの椎体を個々に取り出して、椎体ごとのパラメトリックな形状適合問題を解く。ステップ2では、正常な椎間板付脊柱有限要素モデルの椎体をステップ1で得られた椎体形状に適合させるようなノンパラメトリックな密度型形状最適化問題を解く。以下にそれらの構成法と解法を示す。

2 パラメトリック形状適合問題

CT 画像によるボクセルデータが得られている領域を $D \subset \mathbb{R}^3$ とかく。 D に含まれる椎体に対して椎体番号の集合を \mathcal{V} とかき、椎間板に対して椎間板番号の集合を \mathcal{D} とかくことにする。CT 画像における第 $i \in \mathcal{V}$ 椎体の領域を Σ_i 、その境界を $\partial\Sigma_i$ とかく。 $\partial\Sigma_i$ 上で零値をとり、 Σ_i 内で負値をとる符号付き距離を $d: D \rightarrow \mathbb{R}$ とおく。

一方、正常な位置におかれた有限要素モデルにおける第 $i \in \mathcal{V}$ 椎体の領域を $\Omega_{vi} \in \mathbb{R}^3$ とかき、第 $j \in \mathcal{D}$ 椎間板の領域を Ω_{dj} とかく。また、全体の領域を Ω とかき、

$\bar{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega = (\cup_{i \in \mathcal{V}} \bar{\Omega}_{vi}) \cup (\cup_{j \in \mathcal{D}} \bar{\Omega}_{dj})$ とおく。

ここで、 Ω_{vi} が並進、回転、スケーリングのそれぞれ3自由度、およびテーパー変換2自由度によって変形するときの変数を $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{11}$ とかく。このとき、第 $i \in \mathcal{V}$ 椎体に対して次の問題を構成する。

問題 1 (パラメトリック形状適合問題) $\omega_i: \Omega_{vi} \times \mathbb{R}^{11} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を Ω_{vi} のパラメトリック写像とする。このとき、

$$\min_{\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{11}} \left\{ f_0 = \int_{\omega_i(\Omega_{vi}, \mathbf{q}_i)} d(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right\}$$

を満たす \mathbf{q}_i を求めよ。

問題 1 の数値解は次のようにして得られる。

- 1) Σ_i を CT 画像の輪郭抽出によって求める。
- 2) Σ_i を含むボクセルで $d = 0$ とおく。それに接する外側のボクセルで $d = 1$ 、内側のボクセルで $d = -1$ とおき、その外側のボクセルで $d = 2$ 、内側のボクセルで $d = -2$ とおく。同様に D 上で d の値を割り当てる。
- 3) \mathbf{q}_i の変動に対する f_0 の勾配を差分によって求め、勾配法で問題 1 の最小点を求める。

3 ノンパラメトリック密度型形状適合問題

第 $i \in \mathcal{V}$ 椎体に対する問題 1 の解 \mathbf{q}_i を既知とする。このとき、 $\mathbf{x} \in \Omega_{vi}$ における患者モデルの正常位置からの変位は計算できて、 $\mathbf{u}_{0i}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_i) = \omega_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}_i) - \mathbf{x}$ とおく。

一方、 Ω 上で定義された椎間板付脊柱有限要素モデルを Saint Venant-Kirchhoff 則 (第二 Piola-Kirchhoff 応力と Green-Lagrange ひずみが比例する構成則) に従う超弾性体であると仮定する。そのときの剛性を $\mathbf{C}_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d}$ とかき、既知とする。さらに、設計変数の入る線形空間を $V = W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}) \subset X = W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}) = H^1(\Omega; \mathbb{R})$ ($W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R})$ は s 階微分 p 乗可積分関数の Sobolev 空間) とおき、設計変数を $\theta \in V$ とかき、

$$\phi(\theta) = \phi_0 \frac{\tanh \theta + 1}{2} \quad (1)$$

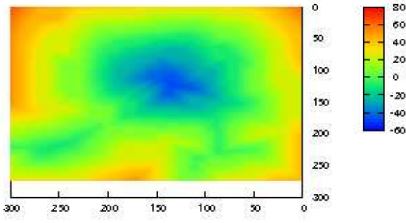


Fig. 1 符号付き距離 d の断面図 (T12)

を密度とみなす. ϕ_0 は密度の最大値を表す正定数である. 剛性は $\mathbf{C}(\theta) = \phi^3(\theta) \mathbf{C}_0$ で与えられると仮定する.

この超弾性体において, 正常モデルと患者モデルの位置が一致する境界を選び, $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ とかく. Γ_D で変位を拘束した下で, 正常モデルのすべての椎体が患者モデルの位置に近づくような大変形を求める問題を次のように定義する. このときの写像を $\mathbf{y} = \mathbf{i} + \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ とかく. ただし, \mathbf{i} は恒等写像を表す. すなわち, \mathbf{u} はこの写像の変位である. この写像に対して, $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = (\partial y_i / \partial x_j)_{ij}$ とおくと,

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{u}) \mathbf{F}^T(\mathbf{u}) - \mathbf{I})$$

を Green-Lagrange ひずみ,

$$\mathbf{\Pi}(\theta, \mathbf{u}) = \mathbf{S}(\theta, \mathbf{u}) \mathbf{F}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{S}(\theta, \mathbf{u}) = \mathbf{C}(\theta) \mathbf{E}(\mathbf{u})$$

を第1 および第2 Piola-Kirchhoff 応力とよばれる. このとき, 超弾性体の大変形問題を次のように定義する.

問題 2 (主問題) 問題 1 の解 \mathbf{q}_i より $\mathbf{u}_{0i} = \mathbf{u}_{0i}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_i)$ は得られているとする. $\alpha : \cup_{i \in \mathcal{V}} \Omega_{vi} \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, は与えられているとする. このとき, θ に対して

$$\begin{aligned} \nabla^T \mathbf{\Pi}(\theta, \mathbf{u}) &= \alpha (\mathbf{u}_{0i} - \mathbf{u})^T \quad \text{in } \cup_{i \in \mathcal{V}} \Omega_{vi} \\ \nabla^T \mathbf{\Pi}(\theta, \mathbf{u}) &= \mathbf{0}^T \quad \text{in } \cup_{j \in \mathcal{D}} \Omega_{dj} \\ \mathbf{\Pi}^T \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{0} \quad \text{on } \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}_D \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_D \end{aligned}$$

を満たす $\mathbf{u} \in U = H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ を求めよ. ただし, $\boldsymbol{\nu}$ は Ω に対する外向き単位法線とする.

問題 1 の数値解は, 幾何学的非線形性を考慮した有限要素法によって得られる.

設計変数 $\theta \in X$ に対して, 主問題 (問題 2) の解 $\mathbf{u} \in U$ を状態変数とよぶ. これらの変数を使って,

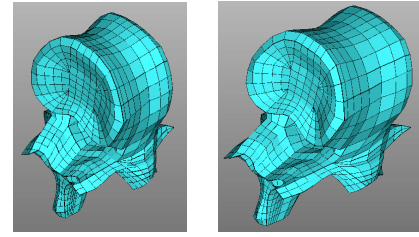
$$f_1(\theta, \mathbf{u}) = \sum_{i \in \mathcal{V}} \int_{\Omega_{vi}} \alpha \|\mathbf{u}_{0i} - \mathbf{u}\|_{\mathbb{R}^3}^2 dx \quad (2)$$

を評価関数とした次のような形状適合問題を定義する.

問題 3 (ノンパラメトリック密度型形状適合問題) f_1 を (2) とする. このとき

$$\min_{\theta \in \mathcal{V}} \{f_1(\theta, \mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in U, \text{ 問題 2}\}$$

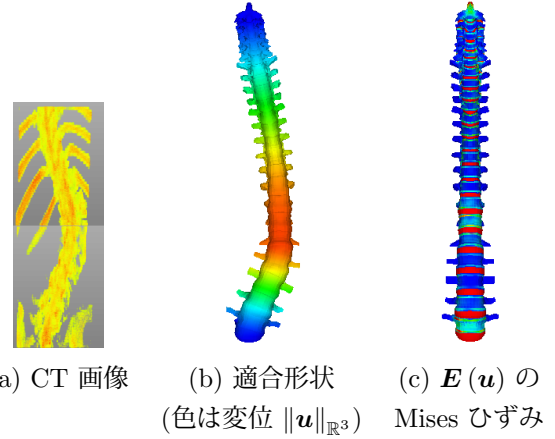
を満たす \mathbf{u} を求めよ.



初期形状

適合形状

Fig. 2 パラメトリック形状適合の結果 (T12)



(a) CT 画像

(b) 適合形状

(c) $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ の

(色は変位 $\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{R}^3}$)

Mises ひずみ

Fig. 3 ノンパラメトリック形状適合の結果 (T12, L1, L2)

問題 3 の数値解は, 密度型位相最適化問題に対する H^1 勾配法⁽²⁾によって得られる.

本研究では, 問題 3 の数値解 \mathbf{u} を求め, さらに, Green-Lagrange ひずみ $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ を評価することを目標とした.

4 数値例

本研究では, 問題 1, 問題 2 および問題 3 を解くプログラムを開発し, 実際の CT 画像から数値解を得た. 図 1 に実際の CT 画像から求めた符号付き距離 d の断面図を示す. 問題 1 の数値解を図 2 に示す. 図 3 に T12, L1, L2 を対象にしたときの問題 3 の結果を示す. 図 3 (a) と (b) の比較から, CT 画像に近い患者モデルが得られていることが確認される.

今回は, 計算機のメモリ制限により 3 椎体しか参照することができなかった. 今後は, 計算機とプログラムの見直しにより, 参照できる椎体数を増やしたい. その上で, $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ を解析することによって特発性側弯症の成因について検討していきたい.

文献

- (1) 畔上秀幸. 脊柱特発性側弯症の成因解明と臨床評価への応用. 計算数理工学レビュー, 日本計算数理工学会誌, No. 2006-1, pp. 7–19, 3 2006.
- (2) H. Azegami, S. Kaizu, and K. Takeuchi. Regular solution to topology optimization problems of continua. *JSIAM Letters*, Vol. 3, pp. 1–4, 1 2011.