

# 流体・構造連成問題における形状最適化

## Shape Optimization on Fluid-Structure Interaction Problems

浜崎 純也 (名大院)

正 畔上 秀幸 (名大院)

Junya Hamasaki, Graduate School of Information Science, Nagoya University, 1 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8601  
Hideyuki AZEGAMI, Graduate School of Information Science, Nagoya University

*Key Words:* Shape Optimization, Inverse Problem, Fluid-Structure Interaction Problem, Finite-Element Method, Traction Method

### 1. はじめに

流体と構造の連成問題の数値解析は生体や流れ場に置かれた柔軟構造のシミュレーションの必要性から需要が高まっている．近年では，数値解析の結果を利用したパラメトリックな形状最適化問題も解かれるようになってきた．本講演では，流体・構造連成問題の形状最適化をノンパラメトリック形状最適化問題として定式化し，形状勾配を利用した力法<sup>(1)</sup>による解法を示す．

### 2. 流体・構造連成問題

流れ場に置かれた弾性体を想定して，図 1 のような有界な  $d = 2, 3$  次元領域  $\Omega^f \subset \mathbb{R}^d$  ( $\mathbb{R}$  は実数の集合)，その境界  $\Gamma^f$ ，で定義された粘性流体の流れ場に囲まれた弾性体の領域  $\Omega^s$ ，その境界  $\Gamma^s$  を考えよう．この場合，弾性体の境界  $\Gamma^s$  はすべて流れ場との連成境界となる ( $\Gamma^s \subset \Gamma^f$ )．弾性体は，部分境界  $\Gamma_0^s$  (測度は零ではない) で変位が拘束されていると仮定する．粘性流体は，流れ場の外側境界  $\Gamma^f \setminus \Gamma^s$  の部分境界  $\Gamma_0^f$  では規定流速  $\hat{u}_\Gamma^f(x, t) = \{\hat{u}_{\Gamma^f}^f\}_{i=1}^d : \Gamma_0^f \times (0, T) \ni (x, t) \mapsto \mathbb{R}^d$  ( $\hat{u}_\Gamma^f(x, \cdot) \in (H^{1/2}(\Gamma_0^f))^d$ )， $\hat{u}_\Gamma^f(\cdot, t) \in (H^1((0, T))^d)$  が与えられ，流速が規定されていない外側部分境界  $\Gamma^f \setminus (\Gamma^s \cup \Gamma_0^f)$  (測度は零ではない) では流れ場の応力が零と仮定する．また，時刻  $t = 0$  のとき，流れ場の流速，圧力，および弾性体の変位は零であると仮定する．このとき，流れ場では時刻  $t \in (0, T)$  において流速  $\hat{u}^f(x, t) : \Omega^f \times (0, T) \ni (x, t) \mapsto \mathbb{R}^d$  と圧力  $p(x, t) : \Omega^f \times (0, T) \ni (x, t) \mapsto \mathbb{R}$  が生じ，弾性体では，流れ場から圧力と粘性力を受けて変位  $u^s(x, t) : \Omega^s \times (0, T) \ni (x, t) \mapsto \mathbb{R}^d$  が生ずると仮定する．弾性体の境界  $\Gamma^s$  では流れ場の変位  $u^f$  と弾性体の変位  $u^s$  は一致する．この流れ場・構造連成問題の運動方程式と境界条件および初期条件は次式となる．ただし，非圧縮性の粘性流体を仮定し，密度を  $\rho^f$  とする．弾性体の密度を  $\rho^s$  とする．

$$\rho^f \hat{u}_i^f + \rho^f \hat{u}_{i,j}^f \hat{u}_j^f - \sigma_{ij}^f(p, \hat{u}^f) = 0 \quad \text{in } \Omega^f \quad (1)$$

$$\hat{u}_{i,i}^f = 0 \quad \text{in } \Omega^f \quad (2)$$

$$\hat{u}^f - \hat{u}_0^f = 0 \quad \text{on } \Gamma_0^f \quad (3)$$

$$\sigma_{ij}^f(p, \hat{u}^f) n_j^f = 0 \quad \text{on } \Gamma^f \setminus (\Gamma^s \cup \Gamma_0^f) \quad (4)$$

$$\rho^s \hat{u}_i^s - \sigma_{ij}^s(u^s) = 0 \quad \text{in } \Omega^s \quad (5)$$

$$u_i^s = 0 \quad \text{on } \Gamma_0^s \quad (6)$$

$$\sigma_{ij}^f(p, \hat{u}^f) n_j^f + \sigma_{ij}^s(u^s) n_j^s = 0 \quad \text{on } \Gamma^s \setminus \Gamma_0^s \quad (7)$$

$$u_i^f - u_i^s = 0 \quad \text{on } \Gamma^s \quad (8)$$

$$u_i^f = u_i^s = \hat{u}_i^f = \hat{u}_i^s = p = 0 \quad \text{at } t = 0 \quad (9)$$

添え字に対して  $(\cdot)_{,i} \equiv \partial(\cdot)/\partial x_i$  および総和規約を用いる．流れ場において，応力  $\sigma_{ij}^f(p, \hat{u}^f) = -p\delta_{ij} + \mu\varepsilon_{ij}^f(\hat{u}^f)$ ， $\mu$  は粘性係数， $\varepsilon_{ij}^f(\hat{u}^f) = (\hat{u}_{i,j}^f + \hat{u}_{j,i}^f)/2$  である．弾性体において，応力  $\sigma_{ij}^s(u^s) = C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^s(u^s)$  は Cauchy 応力， $\varepsilon_{ij}^s(u^s) = (u_{i,j}^s + u_{j,i}^s - u_{k,i}^s u_{k,j}^s)/2$  は Almansi ひずみ， $\{C_{ijkl}\}_{i,j,k,l=1}^d$  は剛性とする． $n^m = \{n_i^m\}_{i=1}^d$  は  $\Omega^m$  の境界における外向き単位法線である．

この問題の運動方程式に，随伴変位の集合  $U_v$  を式 (20) のように定義して，任意の随伴変位  $v \in U_v$  と随伴圧力  $q \in Q$  を乗じて

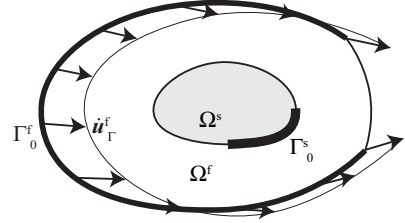


Fig. 1 Fluid-structure interaction system

積分し，境界条件を考慮することによって次の弱形式を得る．

$$\int_0^T \left\{ a^f(\hat{u}^f, \hat{v}^f) + b^f(\hat{u}^f, \hat{v}^f) + c^f(\hat{u}^f, \hat{u}^f, \hat{v}^f) - d^f(\hat{v}^f, p) + d^f(\hat{u}^f, q) + a^s(u^s, v^s) + b^s(\hat{u}^s, v^s) + e^f(p, \hat{u}^f, \hat{v}^f) + e^s(u^f, v^f) \right\} dt = 0$$

$$u \in U_u, p \in Q, \forall v \in U_v, \forall q \in Q \quad (10)$$

ただし，以下の定義に従う．

$$a^f(u^f, v^f) \equiv \int_{\Omega^f} \mu \varepsilon_{ij}^f(u^f) \varepsilon_{ij}^f(v^f) d\Omega \quad (11)$$

$$a^s(u^s, v^s) \equiv \int_{\Omega^s} \sigma_{ij}^s(u^s) \varepsilon_{ij}^s(v^s) d\Omega \quad (12)$$

$$b^f(u^f, v^f) \equiv \int_{\Omega_a} \rho^f u^f v^f d\Omega \quad (13)$$

$$b^s(u^s, v^s) \equiv \int_{\Omega^s} \rho^s u_i^s v_i^s d\Omega \quad (14)$$

$$c^f(u^f, v^f, w^f) \equiv \int_{\Omega^f} \rho^f v_i^f u_{j,i}^f w_j^f d\Omega \quad (15)$$

$$d^f(u^f, p) \equiv \int_{\Omega^f} u_{i,j}^f p d\Omega \quad (16)$$

$$e^f(p, u^f, v^f) \equiv \int_{\Gamma^s} \sigma_{ij}^f(p, u^f) n_j^f v_i^f d\Gamma \quad (17)$$

$$e^s(u^s, v^s) \equiv \int_{\Gamma^s} \sigma_{ij}^s(u^s) n_j^s v_i^s d\Gamma \quad (18)$$

$$U_u \equiv \left\{ u \mid \hat{u} = \hat{u}^f \in (H^1(\Omega^f \times (0, T)))^d \text{ in } \Omega^f, \hat{u} = \hat{u}_0^f \text{ on } \Gamma_0^f, \right.$$

$$u = u^s \in (H^1(\Omega^s \times (0, T)))^d \text{ in } \Omega^s, u = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_0^s, \left. u^f = u^s \text{ on } \Gamma^s, u = \hat{u} = \mathbf{0} \text{ at } t = 0 \right\} \quad (19)$$

$$U_v \equiv \left\{ v \mid \hat{v} = \hat{v}^f \in (H^1(\Omega^f \times (0, T)))^d \text{ in } \Omega^f, \hat{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_0^f, \right.$$

$$v = v^s \in (H^1(\Omega^s \times (0, T)))^d \text{ in } \Omega^s, v = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_0^s, \left. v^f = v^s \text{ on } \Gamma^s, v = \hat{v} = \mathbf{0} \text{ at } t = T \right\} \quad (20)$$

$$Q \equiv \{q \in L^2(\Omega^f \times (0, T))\} \quad (21)$$

### 3. 散逸エネルギー最小化問題

流体・構造連成系の形状最適化の例として、流れ場に置かれた弾性体の形状を変化させて、流れ場の散逸エネルギーを最小化する問題を考えてみよう。流れ場の外側境界  $\Gamma^f \setminus \Gamma^s$  と弾性体の変位拘束部分境界  $\Gamma_0^s$  は固定するものとする。また、弾性体の体積は零に向かう可能性があることから、弾性体の体積を下限値  $m_0$  以上に制限する。この問題は次のように表すことができる。

$$\min_{\Omega^s \subset \mathbb{R}^d} \left\{ J \equiv \int_0^T a^f(\dot{\mathbf{u}}^f, \dot{\mathbf{u}}^f) dt \right\} \quad \text{such that} \quad m_0 - \int_{\Omega^s} d\Omega \leq 0 \quad (22)$$

この問題の Kuhn-Tucker 条件は、式 (23) で定義する Lagrange 乗数形式  $L(\Omega^s, \dot{\mathbf{u}}^f, \Lambda)$  に対して、式 (24) が成立することである。

$$L = J(\Omega^s, \dot{\mathbf{u}}^f) + \Lambda \left( m_0 - \int_{\Omega^s} d\Omega \right) \quad (23)$$

$$\dot{L} = 0, \quad \Lambda \left( m_0 - \int_{\Omega^s} d\Omega \right) = 0, \quad m_0 - \int_{\Omega^s} d\Omega \leq 0, \quad \Lambda \geq 0 \quad (24)$$

ただし、 $L$  の領域変動に対する物質導関数  $\dot{L}$  は次式で与えられる。

$$\dot{L} = \dot{J} + \langle G_\Lambda \mathbf{n}, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^s} \quad (25)$$

$$\dot{J} = \int_0^T \left\{ 2a^f(\dot{\mathbf{u}}^f, \dot{\mathbf{u}}^f) + \langle G^f \mathbf{n}^f, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^f} \right\} dt \quad (26)$$

$$G_\Lambda = -1 \quad \text{on } \Gamma^s \quad (27)$$

$$G^f = \mu \varepsilon_{ij}^f(\mathbf{u}^f) \varepsilon_{ij}^f(\mathbf{u}^f) \quad \text{on } \Gamma^s \quad (28)$$

ただし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma^s}$  は次の定義に従う。

$$\langle G^f \mathbf{n}^f, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^f} \equiv \int_{\Gamma^f} G^f n_i^f V_i d\Gamma \quad (29)$$

$\mathbf{V}$  は領域変動速度である。 $(\cdot)' = (\cdot) - (\cdot)_{,i} V_i$  は形状導関数、 $(\cdot)$  は物質導関数を表す。

原問題の弱形式 (10) に対して、任意の領域変動に対する物質導関数を計算し、 $\mathbf{u}, p$  は原問題の解、さらに、 $\mathbf{v} \in U_v, q \in Q$  であることを考慮すれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\{ a^f(\dot{\mathbf{u}}^f, \dot{\mathbf{v}}^f) - b^f(\dot{\mathbf{u}}^f, \dot{\mathbf{v}}^f) + c^f(\dot{\mathbf{u}}^f, \dot{\mathbf{u}}^f, \dot{\mathbf{v}}^f) + c^f(\dot{\mathbf{u}}^f, \dot{\mathbf{u}}^f, \dot{\mathbf{v}}^f) \right. \\ & - d^f(\dot{\mathbf{v}}^f, p') + d^f(\dot{\mathbf{u}}^f, q) + a^s(\mathbf{u}^s, \mathbf{v}^s) + b^s(\mathbf{u}^s, \mathbf{v}^s) \\ & \left. + e^f(p', \dot{\mathbf{u}}^f, \mathbf{v}^f) + e^s(\mathbf{u}^f, \mathbf{v}^f) \right\} dt = \int_0^T \left( \langle G^f \mathbf{n}^f, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^f} + \langle G^s \mathbf{n}^s, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^s} \right) dt \\ & \mathbf{v} \in U_v, q \in Q, \forall \mathbf{u}' \in U_u, \forall p' \in Q \quad (30) \end{aligned}$$

$$G^f = \sigma_{ij}^f(p, \dot{\mathbf{u}}^f) \varepsilon_{ij}^f(\dot{\mathbf{v}}^f) + \rho^f \dot{\mathbf{u}}^f \dot{\mathbf{v}}^f + \rho^f \dot{u}_{i,j}^f \dot{u}_{j,i}^f \dot{v}_i^f + \dot{u}_{i,i}^f q \quad \text{on } \Gamma^f \quad (31)$$

$$\begin{aligned} G^s &= \sigma_{ij}^s(\mathbf{u}^s) \varepsilon_{ij}^s(\mathbf{v}^s) + \rho^s \dot{\mathbf{u}}_i^s \dot{v}_i^s + \left\{ (\sigma_{ij}^s(\mathbf{u}^s) - \sigma_{ij}^f(p, \dot{\mathbf{u}}^f)) n_j^s v_i^s \right\}_k n_k^s \\ & + (\sigma_{ij}^s(\mathbf{u}^s) - \sigma_{ij}^f(p, \dot{\mathbf{u}}^f)) n_j^s v_i^s k^s \\ & = \sigma_{ij}^s(\mathbf{u}^s) \varepsilon_{ij}^s(\mathbf{v}^s) + \rho^s \dot{u}_i^s \dot{v}_i^s + \sigma_{ij}^s(\mathbf{u}^s) n_j^s (\varepsilon_{ik}^f(\mathbf{v}^s) - \varepsilon_{ik}^f(\dot{\mathbf{v}}^f)) n_k^s \quad \text{on } \Gamma^s \quad (32) \end{aligned}$$

ただし、 $\kappa^m \equiv n_{i,i}^m$  は  $\Omega^m$  の境界における平均曲率の  $d-1$  倍である。式 (30) において時間積分に対して部分積分を施した。また、式 (32) において  $\mathbf{n}^f = -\mathbf{n}^s, \kappa^f = -\kappa^s, \mathbf{v}^f = \mathbf{v}^s$ 、式 (7) の関係を用いた。ここで、随伴問題を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \text{式 (30) の左辺} &= \int_0^T 2a^f(\dot{\mathbf{u}}^f, \dot{\mathbf{u}}^f) dt \\ \mathbf{v} \in U_v, q \in Q, \forall \mathbf{u}' \in U_u, \forall p' \in Q \quad (33) \end{aligned}$$

この問題の解  $\mathbf{v}, q$  を用いれば、式 (26) を次のように置き換えることができる。式 (26) の右辺被積分項第 1 項は、式 (33) の右辺と

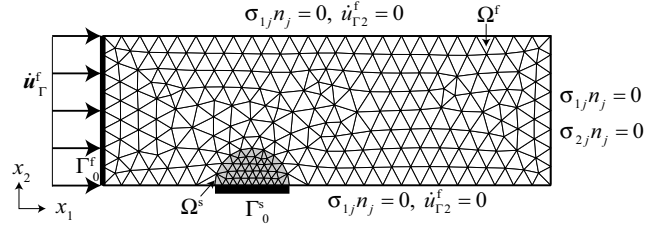


Fig. 2 Elastic body in uniform flow field of incompressible viscous fluid



Fig. 3 Deformed shape and shape gradient density on interaction sub-boundary at initial model

等しく、さらに、式 (33) の左辺は、式 (30) の右辺に等しい。したがって、次式を得る。

$$\begin{aligned} J &= \int_0^T \left\{ \langle G^f \mathbf{n}^f, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^f} + \langle G^s \mathbf{n}^s, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^s} + \langle G^f \mathbf{n}^f, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^s} \right\} dt \\ &= \int_0^T \langle G_J \mathbf{n}^s, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^s} d\omega \quad (34) \end{aligned}$$

ただし、流れ場の外側境界  $\Gamma^f \setminus \Gamma^s$  と弾性体の変位拘束部分境界  $\Gamma_0^s$  の変動を拘束し、速度  $\mathbf{V}$  の許容集合  $D$  を次のように定義する。

$$D = \left\{ \mathbf{V} \in (W^{1,\infty}(\Omega^f \cup \Omega^s))^d \mid \mathbf{V} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma^f \setminus \Gamma^s \cup \Gamma_0^s \right\} \quad (35)$$

$G_J \mathbf{n}^s$  は散逸エネルギーに対する形状勾配、 $G_J$  は形状勾配密度である。

目的汎関数と制約汎関数の形状勾配が  $G_J \mathbf{n}^s, G_\Lambda \mathbf{n}^s$  として計算されれば、最適化に向う形状更新は手法によって解析できる。

### 4. 解析例

非圧縮粘性流体の 2 次元定常流れ場の中に 2 次元弾性体が置かれたモデルに対する解析例を紹介する。問題設定と要素分割を図 2 に示す。流れ場の左端を流速規定部分境界  $\Gamma_0^f$  とし、規定流速  $\dot{\mathbf{u}}_\Gamma^f$  は  $x_1$  方向の一樣流速を仮定した。上下端では、 $x_1$  方向の応力が零、 $x_2$  方向の流速が零、右端では応力が零を仮定した。弾性体の下端を変位拘束部分境界  $\Gamma_0^s$  と仮定した。流れ場では、流速 2 次、圧力 1 次近似の 3 角形要素を使用した。目的汎関数の形状勾配  $G_J \mathbf{n}^s$  は次の手順で解析した。

- 1) 定常を仮定した式 (10) を Newton-Raphson 法で解く。ただし、増分を計算するたびに、流れ場を弾性体と仮定し、連成部分境界の変位を強制変位として与えたときの流れ場領域の変位を用いてメッシュを更新した。
- 2) その解を用いて、定常を仮定した式 (33) を解く。
- 3) 上記の解を用いて、 $G_J \mathbf{n}^s$  を計算する。

図 3 に弾性体が円柱状のときの、流体・構造連成解析によって得られた変形形状を示す。手法による形状更新の結果は講演において紹介する。

### 文献

- (1) 畔上秀幸. 領域最適化問題の一解法. 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 60, pp. 1479-1486, 1994.