

脊柱特発性側彎症の成因に関する非線形座屈解析

Nonlinear buckling analysis on etiology of idiopathic scoliosis

正 青山 大樹 (名大院)

正 畔上 秀幸 (名大院)

Taiki AOYAMA, Graduate School of Information Science, Nagoya University, 1 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8601

Hideyuki AZEGAMI, Graduate School of Information Science, Nagoya University

Key Words: Biomechanics, Finite element method, Nonlinear buckling analysis, Idiopathic Scoliosis, Growth

1. はじめに

特発性側彎症の力学的成因に成長が関与していることは広く認められてきたが、そのメカニズムの詳細は未だ解明されていない。これまでに提唱されてきた仮説は、不均衡な成長が原因であるとする仮説と均衡な成長に伴う座屈現象であるとする仮説である。

著者らは Dickson ら⁽¹⁾の指摘に注目し、有限要素法を用いた数値解析によって座屈説の検証を行ってきた^{(2),(3)}。Dickson らは、標本や患者の詳細な観察に基づいて、特発性側彎症では胸椎後彎の著しい減少あるいは前彎が発生していることを発見し、この変形をもたらす座屈現象であるとする仮説を提唱した。著者らは、Dickson らが指摘した胸椎後彎の著しい減少は椎体の急激な成長によるとの解釈から、胸郭付きの脊柱有限要素モデルを用いて、仙骨のみを固定した下で椎体が成長した際の脊柱の変形とそれに伴う座屈現象を解析した。その結果、臨床モードの多様なシングルモードは成長する椎体の範囲を変化させた 4 次の座屈モードと類似であり、ダブルメジャーモードは 6 次の座屈モードと類似であることから、特発性側彎症の成因は椎体の成長に伴う 4 次あるいは 6 次の座屈現象であるとする仮説を提唱した^{(2),(3)}。1 次から 3 次までの座屈モードは、それぞれ、仙骨から頸骨に向かって変位が増加する側方曲げモード、前方曲げモード、回旋モードとなった。これらのモードは頭部が正常な位置になるように姿勢を制御することによって発生を抑えることができると判断された。

しかしながら、これまで行われた座屈解析は微小変形理論に基づく線形座屈解析であった。そのために、座屈が発生するまでに要した成長量の精度は期待できず、さらに座屈後の安定性に関しては不明のままであった。

本研究では、幾何学的非線形性を考慮した座屈解析を行うことによって座屈説の検討を行った。成長変形を初期ひずみ (非弾性の体積ひずみ) の発生による弾性変形であると仮定して、本研究では、姿勢を制御することによって発生を抑えることができるモードを排除する境界条件の下で、椎体の成長に伴う脊柱の変形経路を解析した。

2. 非線形座屈解析

本研究では椎体の成長を初期ひずみでモデル化し、初期ひずみの発生による幾何学的非線形性を考慮した弾性変形を解析する有限要素法プログラムを作成した。

初期ひずみ $E^0(X, t)$ ($X \in \Omega_0, t \in (0, T)$) の発生による幾何学的非線形性を考慮した弾性変形問題の弱形式は次式となる。

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_0} C_{ijkl} \dot{E}_{kl} \delta E_{ij} d\Omega_0 dt + \int_0^T \int_{\Omega_0} S_{ij} \delta \dot{E}_{ij} d\Omega_0 dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_0} C_{ijkl} \dot{E}_{kl}^0 \delta E_{ij} d\Omega_0 dt \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ は初期配置 $t = 0$ の弾性体の定義された領域、 $S(X, t) = \{S_{ij}(X, t)\}_{i,j=1}^3$ は第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル、 $E(X, t) = \{E_{ij}(X, t)\}_{i,j=1}^3$ は Green-Lagrange ひずみ、 $\{C_{ijkl}\}_{i,j,k,l=1}^3$ は初期配置での弾性テンソル、 $\delta(\cdot)$ は変位の拘束条件を満たす変

位変分 δU に対する変分を表す。なお、本論文の添え字表記では総和規約を用いる。

弱形式 (1) を有限要素法の手続きに従って離散化して次式を得る。

$$K\dot{U} = \dot{F} \quad (2)$$

ただし、 K は接線剛性マトリクス、 \dot{U} は節点速度ベクトル、 \dot{F} は等価荷重速度ベクトルである。本研究では、初期ひずみを、荷重係数 $\lambda(t)$ を用いて $E^0(X, t) = \lambda(t)\bar{E}(X)$ と仮定して、 $\bar{E}(X)$ から計算される等価荷重速度ベクトルを \dot{F} とし、次式で与える。

$$K\dot{U} = \lambda\dot{\bar{F}} \quad (3)$$

ただし、 \bar{F} は大変形による回転を考慮して時間と共に変化する。座屈点は、 K が特異になった平衡点として定義される。すなわち、

$$\det(K) = 0 \quad (4)$$

したがって、座屈点では K の最小固有値 $\omega_1 = 0$ となる。最小固有値に対応した固有モード ϕ_1 と式 (3) 両辺の内積をとれば、座屈点では次式が成立することになる。

$$\phi_1 \cdot (K\dot{U}) = \omega_1 \phi_1 \cdot \dot{U} = \lambda \phi_1 \cdot \dot{\bar{F}} = 0 \quad (5)$$

式 (5) が $\phi_1 \cdot \dot{\bar{F}} \neq 0, \lambda = 0$ で成立する場合は極限点と呼ばれる。この場合には、特に座屈点の判定をすることなく弧長増分法を用いることによって座屈後の変形経路を確保することができる。

一方、式 (5) が $\phi_1 \cdot \dot{\bar{F}} = 0$ で成立する場合は分岐点と呼ばれる。さらに、 $\phi_1 \cdot \dot{\bar{F}} = 0, \lambda = 0$ の場合には対称分岐点と呼ばれる。これらの場合には、座屈点の判定と ϕ_1 の解析が必要となる。本研究では、 $K = LDL^T$ と分解しておき、座屈点では D における負の項の数が変化する性質を用いて座屈点の判定を行った。 ϕ_1 の解析は、Newton-Raphson 法の残差ベクトルが固有ベクトルに近づく性質を利用した scaled corrector 法と block Lanczos 法の両者で行い、結果の一致を確認しながら選択は解析者が対話的に行った。

3. 解析モデルと解析条件

本研究では既報⁽⁴⁾の胸郭付脊柱有限要素モデル (要素数 68582, 節点数 84603, 全長 610mm) を使用した。

境界条件は、第 4 胸椎 (T4) から第 10 胸椎 (T10) を成長させた場合の 4 次モードの節に相当する第 7 頸椎前方の x_1 と x_3 方向、および第 7 頸椎側方の x_1 方向を拘束した。

成長をモデル化した初期ひずみは、硝子軟骨板 (hyaline cartilage plate) と骨端輪 (epiphyseal ring) に椎体ごとに一樣な体積ひずみ $E_{ij}^0(X, t) = \lambda(t)\bar{E}(X) = \lambda(t)\alpha(X)\delta_{ij}$ (δ_{ij} は Kronecker デルタ) で与えた。椎体ごとの α の値を表 1 に示す。

4. 解析結果

成長に伴う大変形解析に先立ち、線形座屈解析を行った。座屈モードを図 1 に示す。予想された通り、1 次の座屈モードは頸椎

Table 1 Growth proportion α

Vertebrae	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10
α [-]	0.05	0.10	0.125	0.15	0.125	0.10	0.05

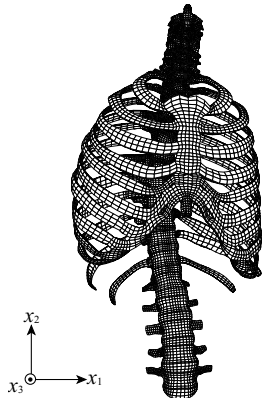


Fig. 1 The first linear buckling mode

Table 2 Loading factors λ at characteristic points

Points	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
λ [-]	0.718	0.623	0.612	0.671	0.703

部の拘束のない4次モードと類似であった．このときの荷重係数は $\lambda = 0.787$ であった．

一方，大変形解析の結果，線形座屈解析よりもやや小さな荷重係数で最初の座屈点が見られた．本解析では，最初の座屈点から安定な変形に至るまでの過程を解析した．特徴的な現象が見られたときの荷重係数 λ の値を表2に示す．表中，P₁ と P₃ で座屈点の条件が成立し，対話的な解析の結果，両点とも極限点と判定された．P₁ から P₅ までの変形は極めてわずかであり，初期形状と区別が付かないことから全体の変形図は省略する．そこで，頂椎付近となる第8胸椎前方中央の点に着目し，初期状態から P₅ までの変形経路を図2に示す．この結果から，次の特徴が認められる．

- 1) 線形座屈解析よりもやや小さな荷重係数で最初の座屈点が見られた．
- 2) 最初の座屈点は極限点で，座屈発生後は不安定な状態であった．
- 3) その極限点から安定な状態に至る過程でもう一つの座屈点が見られた．その座屈点も極限点であった．

5. 考察

今回の解析で得られた座屈点までの成長量（初期ひずみ）に関して次のように考えることができる．今回の解析では，硝子軟骨板と骨端輪のみを成長させた．座屈点までの成長量は表1の α に荷重係数 $\lambda = 0.718$ を乗じた値となる．この値を第4胸椎から第10胸椎の平均的な成長量に換算してみよう．硝子軟骨板と骨端輪の成長量の平均が約 $0.10 \times 0.718 \approx 0.072$ で，硝子軟骨板と骨端輪の厚さが椎体と椎間板の厚さの約12%であることから，第4胸椎から第10胸椎の平均的な成長量は約 $0.072 \times 0.12 \approx 0.0086$ と見積もることができる．一方，正常な女子の成長量（ひずみ）を文献⁽⁵⁾に基づいて算出すると，8歳から9歳の胸椎の平均的な1年間の成長量は0.070となり，1箇月当りの成長量は $0.070 \div 12 \approx 0.0058$ と見積もることができる．これらの結果から，今回の解析で得られた座屈点は約 $0.0086 \div 0.0058 \approx 1.5$ 箇月に相当する成長量で発生したことになる．

この見積りに基づけば，成長を仮定した第4胸椎から第10胸椎の成長が他の椎体の成長よりも1.5箇月程度の成長量で上回れば，今回解析で得られた座屈現象が発生することになる．この結果は，これまで特発性側彎症の成因として唱えられてきた不均衡成長説の原因となった不均衡力が，この座屈によるわずかな飛び乗り現象によるものであるとの仮説を新たに唱えることができる．

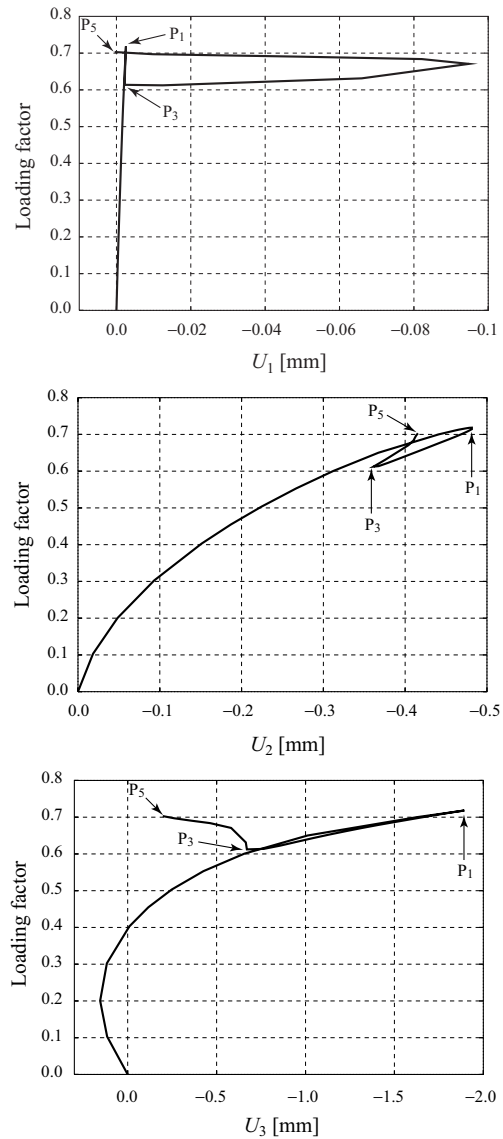


Fig. 2 Loading factor vs. displacement at the front-center point on the eighth thoracic vertebra

文献

- (1) R. A. Dickson, J. O. Lawton, I. A. Archer, and W. P. Butt. The pathogenesis of idiopathic scoliosis (biplanar spinal asymmetry). *J. Bone and Joint Surg.*, Vol. 66B, pp. 8–15, 1984.
- (2) H. Azegami, S. Murachi, J. Kitoh, Y. Ishida, N. Kawakami, and M. Makino. Etiology of idiopathic scoliosis: Computational study. *Clinical Orthopaedics and Related Research*, No. 357, pp. 229–236, 1998.
- (3) 竹内謙善, 畔上秀幸, 笹岡竜, 村地俊二, 鬼頭純三, 石田義人, 川上紀明, 後藤学, 牧野光倫, 松山幸弘. 特発性側彎症の成因に関する数値シミュレーション（多様なモードの成因）. 脊柱変形, 日本側彎症学会誌, Vol. 16, No. 1, pp. 11–16, 2001.
- (4) K. Takeuchi, H. Azegami, S. Murachi, J. Kitoh, Y. Ishida, N. Kawakami, and M. Makino. Study on treatment with respect to idiopathic scoliosis: Sensitivity analysis based on buckling theory. *JSME International Journal Series C*, Vol. 44, No. 4, pp. 1059–1064, 2001.
- (5) A. E. Nehme, E. J. Riseborough, and R. B. Reed. Normal spine growth. In *Scoliosis 1979*, pp. 103–109. Academic Press, 1980.