

シェルの面外変動に対する形状最適化

Shape optimization for shells with respect to out-plane variation

学 青山 大樹 (豊橋技科大)

正 畔上 秀幸 (名古屋大)

Taiki AOYAMA, Toyohashi University of Technology, Toyohashi 441-8580

Hideyuki AZEGAMI, Nagoya University, Nagoya 464-8601

Key Words: Optimum Design, Numerical Analysis, Finite-Element Method, Traction Method

1. はじめに

シェル構造は予め彎曲を加えることによって飛躍的に剛性を高めることができる特異な特徴を有している。剛性を高めるために、これまでは、予め数種類の彎曲を用意しておいて、最適な組み合わせを求める方法、あるいは、均質化法で定式化された最適な位相解析法を応用した方法などが提案されてきた。境界移動型の定式化に基いた形状最適化方法では、シェルの面内方向への移動を許した場合の解析方法は示されてきた。しかしながら、シェルを面外方向に彎曲させる問題に対しては、解析方法が示されてこなかった。

本研究では、3次元弾性体に対する形状最適化理論をシェルの彎曲問題に適用することを試みた。本論文では、シェルが板厚を変えずに面外方向に変動したときの平均コンプライアンス最小化問題に対する形状勾配の理論式を導出し、それに基づいて力法^{(1),(2)}で解析した結果を紹介する。

2. 平面要素シェル問題の弱形式

本研究では、シェルを平面要素の結合体と仮定する。各平面要素では、図1に示すように局所座標系 (x_1, x_2, x_3) を定義する。平面要素内の局所座標系に対応した変位 $\{u_i\}_{i=1,2,3}$ は、Reissner-Mindlin 理論に従って、図2に示すように、中央面 A の面内変位 $\mathbf{u}_0 = (u_{01}, u_{02})$ と面外方向の変位 w および x_1 軸、 x_2 軸まわりの回転角 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ によって、次式で与えられると仮定する。

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u_{01}(x_1, x_2) - x_3\theta_1(x_1, x_2) \quad (1)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = u_{02}(x_1, x_2) - x_3\theta_2(x_1, x_2) \quad (2)$$

$$u_3(x_1, x_2) = w(x_1, x_2) \quad (3)$$

ただし、テンソルの添字表記は総和規約と偏微分表記法 $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} = (\cdot)_{,i}$ を用いた。

このとき、微小変形理論に基づく平面要素シェル弾性問題の弱形式は、3次元弾性問題の弱形式に式(1)から(3)の関係式を代入し、平面応力であることを考慮して次式となる。

$$a((\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\theta}, w), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{w})) = l((\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{w})) \quad \forall (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{w}) \in U \quad (4)$$

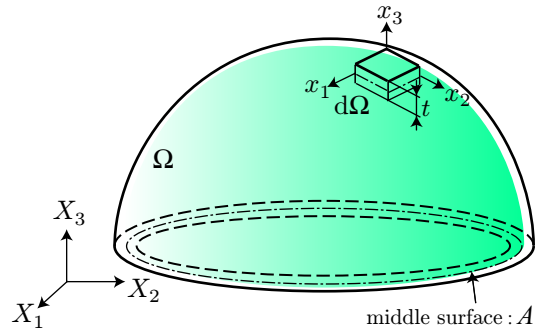


Fig. 1 Global coordinates and local coordinates

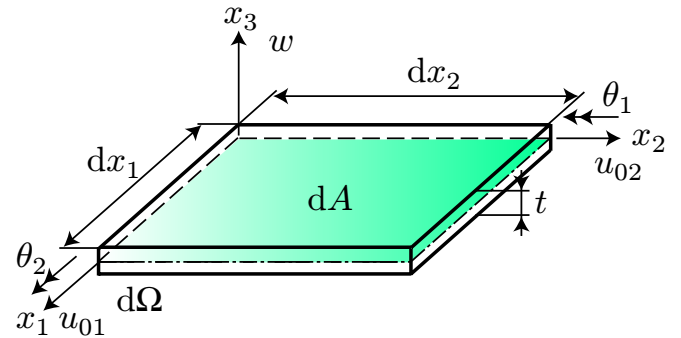


Fig. 2 Displacement of flat shell element

ただし、双1次形式 $a(\cdot, \cdot)$ と1次形式 $l(\cdot)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} a((\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\theta}, w), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{w})) &= \int_{\Omega} C_{\alpha\beta\gamma\delta} (\bar{u}_{0\alpha,\beta} - x_3\bar{\theta}_{\alpha,\beta})(u_{0\gamma,\delta} - x_3\theta_{\gamma,\delta}) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} kc_{\alpha\beta} (\bar{w}_{,\alpha} - \bar{\theta}_{\alpha})(w_{,\beta} - \theta_{\beta}) dx \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} l((\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{w})) &= \int_{\partial A} (-\bar{\theta}_{\alpha} M_{\alpha} + \bar{u}_{0\alpha} N_{\alpha} + \bar{w} N_3) ds \\ &\quad + \int_A (-\bar{\theta}_{\alpha} m_{\alpha} + \bar{u}_{0\alpha} n_{\alpha} + \bar{w} n_3) d\Gamma \end{aligned} \quad (6)$$

また、領域 Ω は中央面 A と板厚方向の領域 $(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2})$ によって、シェルの端面 S は A の境界 ∂A によって次のように定義する。

$$\Omega = A \times \left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right), \quad S = \partial A \times \left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right) \quad (7)$$

U は変位の基本境界条件を満たす Ω で定義された変位の集合である． $\{C_{\alpha\beta\gamma\delta}\}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2}$, $\{c_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ はそれぞれ膜剛性，せん断剛性である．また， k はせん断の補正係数である． $\{M_\alpha\}_{\alpha=1,2}$, $\{N_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ は外力によるそれぞれ単位長さ当たりの x_α 軸まわりのモーメントと x_α 方向の力である．さらに， $\{n_\alpha\}_{\alpha=1,2}$, n_3 はそれぞれ x_α , x_3 方向の外力による単位面積当たりの力である．式 (5) を $\gamma_\alpha = w_{,\alpha} - \theta_\alpha$ とおいて厚さ方向に積分すれば

$$a((\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\theta}, w), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{w})) = \int_A tC_{\alpha\beta\gamma\delta}\bar{u}_{0\alpha,\beta}u_{0\gamma,\delta} d\Gamma + \int_A \frac{t^3}{12}C_{\alpha\beta\gamma\delta}\bar{\theta}_{\alpha,\beta}\theta_{\gamma,\delta} d\Gamma + \int_A tkc_{\alpha\beta}\bar{\gamma}_\alpha\gamma_\beta dx \quad (8)$$

となり，面内変形と曲げ変形は互いに独立となる．なお，有限要素法によって全体剛性マトリックスを作成する場合には，局所座標系の領域積分および境界積分によって要素剛性マトリックスおよび等価節点力ベクトルを作成し，それを全体座標系に正規直交変換 (Jacobian は 1) した上で重ね合わせていく必要がある．

3. 外力仕事最小化問題

体積を制約とした平均コンプライアンス最小化問題は以下のように表せる．ただし，強制変位および体積力は作用しないものとする．

$$\min_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} l((\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\theta}, w)) \quad (9)$$

$$\text{subject to } a((\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\theta}, w), (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{w})) = l((\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{w})) \quad \forall \bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{w} \in U \quad (10)$$

$$\int_\Omega dx - M_0 \leq 0 \quad (11)$$

この問題は自己随伴問題となる．板厚が変化しない領域変動を仮定し，非零の外力が作用する A および ∂A の部分領域は領域変動を拘束すると仮定し，板厚がシェルの代表長さに較べて十分小さいと仮定すれば，目的汎関数の物質導関数は速度 V の 1 次形式 $l_G(V)$ は次式となる．

$$l_G(V) = \langle G_0\nu, V \rangle + \Lambda \langle G_1\nu, V \rangle \quad (12)$$

$$\langle G_0\nu, V \rangle = \int_A G_0^A \nu^{\text{top}} \cdot V d\Gamma + \int_{\partial A} G_0^{\partial A} \nu \cdot V ds \quad (13)$$

$$\langle G_1\nu, V \rangle = \int_S G_1^S \nu \cdot V d\Gamma \quad (14)$$

ν^{top} は上面 ($x_3 = \frac{t}{2}$) の外向き単位法線を表す．ここで，

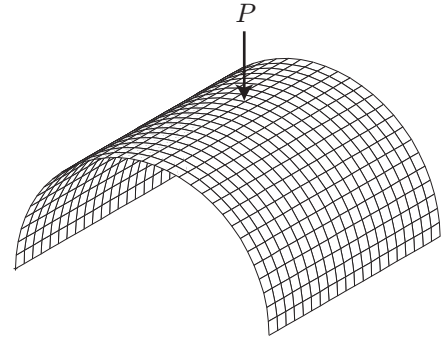
$$G_0^A = C_{\alpha\beta\gamma\delta} \left(\bar{u}_{0\alpha,\beta} - \frac{t}{2}\bar{\theta}_{\alpha,\beta} \right) \left(u_{0\gamma,\delta} + \frac{t}{2}\theta_{\gamma,\delta} \right) + C_{\alpha\beta\gamma\delta} \left(\bar{u}_{0\alpha,\beta} - \frac{t}{2}\bar{\theta}_{\alpha,\beta} \right) \left(u_{0\gamma,\delta} - \frac{t}{2}\theta_{\gamma,\delta} \right) \quad (15)$$

$$G_0^{\partial A} = - \left(tC_{\alpha\beta\gamma\delta}\bar{u}_{0\alpha,\beta}u_{0\gamma,\delta} + \frac{t^3}{12}C_{\alpha\beta\gamma\delta}\bar{\theta}_{\alpha,\beta}\theta_{\gamma,\delta} + tkc_{\alpha\beta}\bar{\gamma}_\alpha\gamma_\beta \right) \quad (16)$$

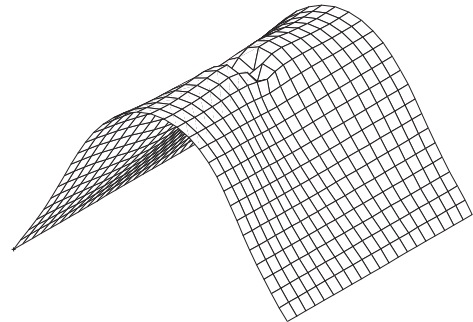
$$G_1^S = 1 \quad (17)$$

4. 解析例

両端単純支持されたアーチシェルを初期形状にして，中央に集中荷重を受ける場合の体積制約付平均コンプライアンス最小化問題を力法によって解析した．解析結果を図 3 と図 4 に示す．



(a) Initial shape



(b) Optimal shape

Fig. 3

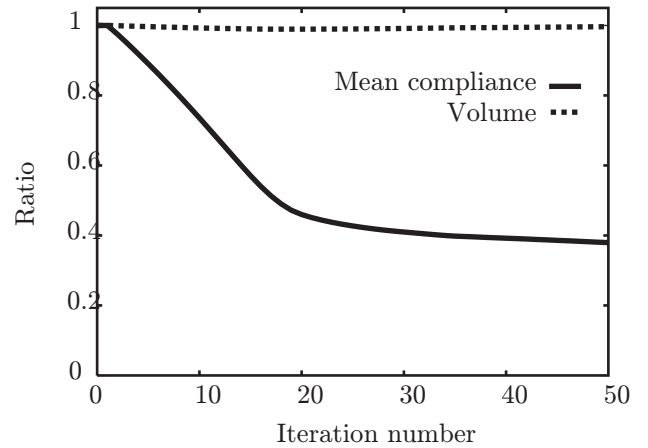


Fig. 4 Iteration history

文献

- (1) 畔上秀幸, 吳志強. 線形弾性問題における領域最適化解析 (力法によるアプローチ). 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 60, pp. 2312–2318, 1994.
- (2) 下田昌利, 吳志強, 畔上秀幸, 桜井俊明. 汎用 FEM コードを利用した領域最適化問題の数値解析法 (力法によるアプローチ). 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 60, pp. 2418–2425, 1994.