

# 力法を用いた有限要素モデルのモーフィング

Morphing techniques of finite-element models using traction method

正 笹岡 竜 (名古屋大学)

足達 一真 (名古屋大学)

正 畔上 秀幸 (名古屋大学)

Ryu Sasaoka, Nagoya University, 1 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8601

Kazuma Adachi, Nagoya University

Hideyuki AZEGAMI, Nagoya University

*Key Words:* Shape Optimization, Finite-Element Method, Traction Method, Morphing Method, Fitting Method

## 1. はじめに

既存の有限要素モデルの境界形状を写像により所望の形状に変更する技術はモーフィングと呼ばれ、商用プログラムの出現により機械の設計開発に使用されるようになってきた。しかしながら、そこで使われている写像は CAD で定義された変数や特定の節点の座標を変数に選んだパラメトリックな写像がほとんどであった。また、ボクセル表記の領域に適合するように既存の有限要素モデルを変形させていく機能を備えたプログラムは見当たらない。

本論文では、ノンパラメトリックなモーフィング技法を 2 種類提案する。一つは狭い意味のモーフィング法、もう一つをフィッティング法と呼ぶ。モーフィング法は、既存の有限要素モデル上の指定した節点を目標位置に移動することを目的にした形状修正法である。フィッティング法は、既存の有限要素モデルを参照領域内に納めることを目的にした形状修正法である。参照領域は CT データのようなボクセル形式で記述されていてもよい。いずれの方法においても、目的に適う形状最適化問題を定式化して、それぞれの問題に対する形状勾配を用いて既存の有限要素モデルを変形させる。形状勾配の滑らかさの欠如は力法<sup>(1)</sup>の適用によって克服する。

## 2. モーフィング法

既存の有限要素モデル上で指定した有限個の節点が参照領域上のそれぞれの目標位置に移動する形状最適化問題を考えよう。本論文では、次のようなモーフィング問題の形状勾配を用いた力法によって有限要素モデルを変形させる方法をモーフィング法として提案する。

**2.1 モーフィング問題** 有界な領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ )、その境界  $\Gamma$ 、で定義された連続体が、参照領域  $\Omega^{\text{ref}} \subset \mathbb{R}^n$  に一致するように変動させたい。特に、連続体内の指定した  $q$  個の点  $\mathbf{x}_k \in \Omega$  ( $k = 1, 2, \dots, q$ ) はそれぞれ参照領域内の点  $\mathbf{x}_k^{\text{ref}} \in \Omega^{\text{ref}}$  ( $k = 1, 2, \dots, q$ ) に移動すること、連続体の領域の大きさが参照領域の大きさと一致するが必須であると仮定する。このときの連続体の形状最適化問題は次のように定式化される。

$$\min_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \left\| \mathbf{x}_k^{\text{ref}} - \mathbf{x} \right\|^2 dx \quad (1)$$

$$\text{such that } \int_{\Omega} dx = \int_{\Omega^{\text{ref}}} dx \quad (2)$$

$\delta(\cdot)$  は Dirac の  $\delta$  関数である。

この問題に Lagrange 乗数法を適用して形状勾配を導出する。体積制約に対する Lagrange 乗数  $\Lambda$  を用いて、本問題の Lagrange 乗数形式  $L$  は次式のように表せる。

$$L = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \left\| \mathbf{x}_k^{\text{ref}} - \mathbf{x} \right\|^2 dx + \Lambda \left( \int_{\Omega} dx - \int_{\Omega^{\text{ref}}} dx \right) \quad (3)$$

また、 $L$  の領域変動に対する物質導関数  $\dot{L}$  は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^q \dot{\delta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \left\| \mathbf{x}_k^{\text{ref}} - \mathbf{x} \right\|^2 dx \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) (\mathbf{x}_k^{\text{ref}} - \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} dx \\ &\quad + \Lambda \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{V} d\Gamma + \dot{\Lambda} \left( \int_{\Omega} dx - \int_{\Omega^{\text{ref}}} dx \right) \\ &= -2 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) (\mathbf{x}_k^{\text{ref}} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{V} dx \\ &\quad + \Lambda \int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{V} d\Gamma + \dot{\Lambda} \left( \int_{\Omega} dx - \int_{\Omega^{\text{ref}}} dx \right) \quad (4) \end{aligned}$$

ここで、 $(\cdot)$  は物質導関数、 $\boldsymbol{\nu}$  は外向き法線ベクトル  $\mathbf{V}$  は領域変動に対する速度である。式 (4) において、 $\dot{\delta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = 0$  と、 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}$  の関係式を用いた。

領域の大きさ制約を満たすように  $\Lambda$  が決定されていれば、Lagrange 汎関数の物質導関数は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{L}|_{\Lambda} &= \int_{\Omega} \mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{V} dx + \int_{\Gamma} G_1 \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{V} d\Gamma \\ &\equiv (\mathbf{G}_0, \mathbf{V}) + \langle G_1 \boldsymbol{\nu}, \mathbf{V} \rangle \quad (5) \end{aligned}$$

$$\mathbf{G}_0 \equiv -2 \sum_{k=1}^q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) (\mathbf{x}_k^{\text{ref}} - \mathbf{x}), \quad G_1 \equiv \Lambda \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{G}_0$  は目的汎関数の形状勾配、 $G_1 \boldsymbol{\nu}$  は領域の大きさに対する形状勾配を与える。

**2.2 力法を用いたモーフィング法** モーフィング問題の形状勾配を用いて力法で形状修正を行えば、目的関数は減少することが予想される。しかしながら、 $\mathbf{G}_0$  が Dirac の  $\delta$  関数として与えられているために、力法を 1 回適用しただけでは滑らかな境界は得られない。実際、図 1(a) のような両端固定ばりの中央部を右に移動する問題では、力法によって得られる形状は図 1(b) となる。

そこで、次のようにバネ付力法<sup>(1)</sup>を繰り返し適用する方法を提案する。力法は境界を平滑化するために使われた<sup>(2)</sup>。

$$(i) \text{ Slove } \mathbf{V}^{[1]} \in D : a(\mathbf{V}^{[1]}, \mathbf{y}) + \alpha \langle (\mathbf{V}^{[1]} \cdot \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu}, \mathbf{y} \rangle = -(\mathbf{G}_0, \mathbf{y}) - \langle G_1 \boldsymbol{\nu}, \mathbf{y} \rangle \forall \mathbf{y} \in D.$$

$$(ii) \text{ Substitute } \mathbf{V}^{[1]} \text{ on } \Gamma \text{ into } \mathbf{G}^{[2]} \text{ and slove } \mathbf{V}^{[2]} \in D : a(\mathbf{V}^{[2]}, \mathbf{y}) + \alpha \langle (\mathbf{V}^{[2]} \cdot \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{G}^{[2]}, \mathbf{y} \rangle \forall \mathbf{y} \in D.$$

$$(iii) \text{ Iterate to substitute } \mathbf{V}^{[m-1]} \text{ on } \Gamma \text{ into } \mathbf{G}^{[m]} \text{ and to slove } \mathbf{V}^{[m]} \in D : a(\mathbf{V}^{[m]}, \mathbf{y}) + \alpha \langle (\mathbf{V}^{[m]} \cdot \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{G}^{[m]}, \mathbf{y} \rangle \forall \mathbf{y} \in D \text{ until satisfied smoothness is obtained.}$$

ただし、双一次形式  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  と  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は式 (5) の定義に従う．双一次形式  $a(\cdot, \cdot)$  は次式で定義する．

$$a(\mathbf{V}, \mathbf{y}) \equiv \int_{\Omega} C_{ijkl} V_{k,l} y_{i,j} dx \quad (7)$$

ここで、 $\{C_{ijkl}\}_{i,j,k,l=1,2,\dots,n}$  は楕円性を有した剛性テンソルである．式 (7) において、総和規約と偏微分表記法  $(\cdot)_{,i} \equiv \partial(\cdot)/\partial x_i$  を使用した．集合  $D$  は次のように定義される．

$$D = \{ \mathbf{V} \in (H^1(\Omega^n))^n \mid \text{shape constraints} \}. \quad (8)$$

**2.3 解析例** 図 1(a) の問題に力法を二回適用した結果を図 1(c) に示す．

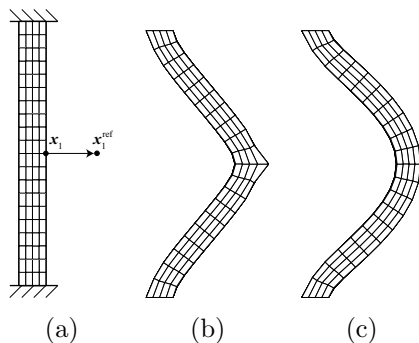


Fig. 1 Morphing a beam-like finite-element model to be bended

### 3. フィッティング法

既存の有限要素モデルが参照領域に向かって動き出し、完全に一致したときに停止するような形状最適化問題を考えよう．参照領域は CT データのようなボクセル形式で記述されていてもよいと考える．本論文では、次のようなフィッティング問題の形状勾配を用いた力法によって有限要素モデルを変形させる方法をフィッティング法として提案する．

**3.1 フィッティング問題** 有界な領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ )、その境界  $\Gamma$ 、で定義される連続体<sup>6</sup>、参照限界領域  $\Omega^{\text{limit}} \subset \mathbb{R}^n$  に内包され、参照領域  $\Omega^{\text{ref}} \subset \Omega^{\text{limit}} \subset \mathbb{R}^n$ 、その境界  $\Gamma^{\text{ref}}$ 、に一致させる形状最適化問題は次のように定式化される．

距離関数  $d(\mathbf{x}) : \Omega^{\text{limit}} \ni \mathbf{x} \mapsto d \in \mathbb{R}$  を  $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{limit}}$  における  $\Gamma^{\text{ref}}$  からの距離を与える関数と定義して、符号付距離関数  $\phi(\mathbf{x}) : \Omega^{\text{limit}} \ni \mathbf{x} \mapsto \phi \in \mathbb{R}$  を次式で定義する．

$$\phi(\mathbf{x}) \equiv \chi_{\Omega^{\text{ref}}}(\mathbf{x})d(\mathbf{x}), \quad \chi_{\Omega^{\text{ref}}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} -1 & (\mathbf{x} \in \Omega^{\text{ref}}) \\ 1 & (\mathbf{x} \notin \Omega^{\text{ref}}) \end{cases} \quad (9)$$

フィッティング問題は  $\phi(\mathbf{x})$  を用いて次のように定式化される．

$$\min_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} \left\{ J \equiv \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}) dx \right\}. \quad (10)$$

領域変動に伴う目的汎関数の導関数  $j$  は、物質導関数の公式を用いて次式となる．

$$j = \int_{\Gamma} \phi(\mathbf{x}) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{V} d\Gamma \equiv \langle G\boldsymbol{\nu}, \mathbf{V} \rangle, \quad G \equiv \phi(\mathbf{x}) \quad (11)$$

ここで、 $G\boldsymbol{\nu}$  はこの問題の形状勾配である．

**3.2 力法を用いたフィッティング法** フィッティング問題の形状勾配  $\phi(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}$  は、参照領域の境界  $\Gamma^{\text{ref}}$  が区分的に滑らかであれば、 $\Omega^{\text{ref}}$  が凸でなくても  $\Omega$  との距離が十分小さければ、負の形状勾配の方向に境界を移動していくことで、滑らかさが保持されながら収束すると予想される．しかしながら、 $\Omega^{\text{ref}}$  がボクセル形式で記述され、距離をイメージデータ処理によりボクセルごとの離散値で評価した場合には、 $\phi(\mathbf{x})$  が階段状関数で与えられることになる．

そこで、次のように力法を適用する方法を提案する．

- (i) Extract contour from each cross section of a voxel image data and set  $d = 0$  for the voxels on the contour.
- (ii) Allocate a distance unit to  $d$  for the voxels contacting with the voxels on the contour and twice distance unit  $d$  for the voxels contacting with the voxels with the distance unit, and iterate in a similar fashion for all the voxels.
- (iii) Iterate to solve  $\mathbf{V} \in D : a(\mathbf{V}, \mathbf{y}) + \alpha \langle (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu}, \mathbf{y} \rangle = \langle \chi_{\Omega^{\text{ref}}}(\mathbf{x})d(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle \forall \mathbf{y} \in D$  and to reshape with  $\Delta s \mathbf{V}$  using an incremental parameter  $\Delta s$  until the objective functional is converged.

**3.3 解析例** フィッティング法を用いて第三腰椎の有限要素モデルを CT 画像にフィッティングさせた解析例を図 2 に示す．本解析において、有限要素モデルの皮質骨部分を  $\Omega$  として仮定した．その結果、有限要素モデルの海綿骨部分は皮質骨の形状修正に伴って変形した．

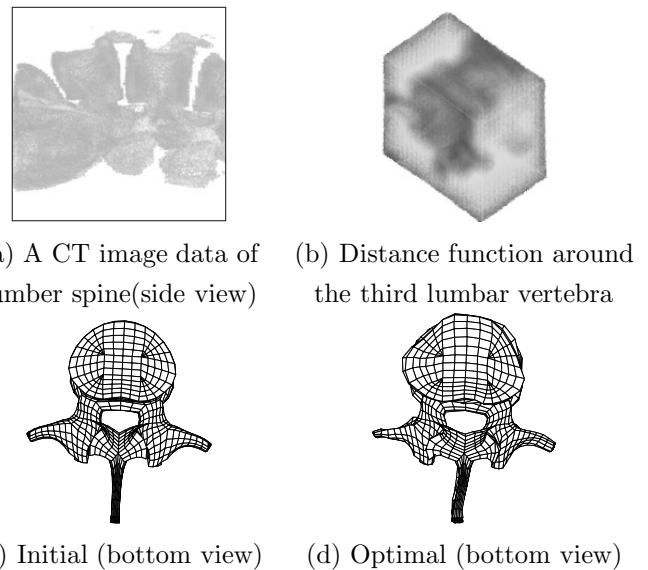


Fig. 2 Fitting a finite-element model of the third lumbar vertebra to a CT image data

### 文 献

- (1) 竹内謙善, 畔上秀幸. 力法による形状最適化スキームにおける収束性の改善. 日本機械学会 2001 年度年次大会講演論文集, Vol. 5, pp. 39–40, 2001.
- (2) H. Azegami, S. Kaizu, Shimoda M., and E. Katamine. Irregularity of shape optimization problems and an improvement technique. In S. Hernandez and C. A. Brebbia, editors, *Computer Aided Optimization Design of Structures V*, pp. 309–326. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1997.