

形状最適化問題の正則化解法

畔上 秀幸 *

* 名古屋大学 情報科学研究科

概要. 形状最適化問題は偏微分方程式の境界値問題が定義された領域の境界形状に対する最適化問題として定義される. 設計変数は領域写像で与えられる. 評価関数は設計変数と境界値問題の解に対する汎関数で与えられる. 本論文では, 評価関数の領域変動に対する Fréchet 微分は次の領域を定義できる正則性を備えていないこと, およびその微分を正則化する関数空間の勾配法が考えられることを示した.

Regularized Solution to Shape Optimization Problem

Hideyuki Azegami*

*Graduate School of Information Science, Nagoya University

Abstract. A shape optimization problem is defined as an optimization problem to boundary shape of domain in which boundary value problem of partial differential equation is defined. A design variable is given by a domain mapping. Cost functions are defined as functionals of the design variable and the solution to the boundary value problem. The present paper described that the Fréchet derivatives of cost functions with respect to domain variation do not have the regularity required in order to define a next domain, and that a gradient method can be considered for regularizing the derivatives.

1. はじめに

偏微分方程式の境界値問題が定義された領域の境界形状を設計対象にした最適化問題は形状最適化問題とよばれる. 設計変数には, 与えられた初期領域から新しい領域への写像が選ばれる^{*1}. 評価関数には, 設計変数と境界値問題の解を使って定義された汎関数が選ばれる.

このような形状最適化問題に関しては 20 世紀初めから研究が行われてきた. 例えば, Hadamard の莫大な業績の中に薄膜の基本振動数が最大になるような境界形状を求める問題に関する記述がある. そこには, 境界を外向き法線の方向に移動したときの基本振動数の Fréchet 微分に相当する考え方が示されている [25, 75]. その後も形状変動に対する Fréchet 微分を形状微分とよんで, たくさんの研究者が研究成果を発表してきた [13–21, 26–30, 59, 61–64, 74, 75, 85, 86].

このように形状微分の計算方法に関する理論は着実に発展してきたが, 形状微分を用い

^{*1} 連続関数の等値面で境界を定義する方法 (レベルセット法) も使われるが, 本論文では省略する.

た形状最適化問題の解法については、それに見合う進展がみられなかった。その原因は、形状微分が次の形状をつくるのに必要な正則性を備えていなかったためである。実際、有限要素モデルの境界上の節点座標を設計変数に選んで、設計変数の変動に対する Fréchet 微分を評価して、その値を用いて節点を移動していくと境界形状が波打つ数値不安定現象が現れることが知られていた [35]。そのような状況を避けるために、最適設計の研究者は設計変数に有限要素モデルの自由度とは別の変数を選ぶことで解決しようとした [4]。そこで使われてきた方法では、本来の形状微分とは異なる微分が使われていた。

本論文では、まず、形状微分が次の領域をつくるのに必要な正則性を備えていないことを明らかにする。その上で、それを使った適切な勾配法を用いれば、数値不安定現象に遭わずに形状最適化問題を解くことができることを示す。その基本的な考え方は、20 年ほど前の拙著 [3] の中で力法とよんで提案したものである。その後、力法の一般化も試みている [9]。しかし、それらの内容は定義があいまいなまま直観に頼って説明されていたために、その方法の正当性を判断しづらい内容になっていた。また、最近になって、密度を設計変数にした位相最適化問題に対して、力法の考え方を応用した勾配法を H^1 勾配法とよんで提案し *2, 数値不安定現象が現れないことを確認している [6]。そこで、力法を境界変動型の形状最適化問題に対する H^1 勾配法であると位置付けて、その正当性を示すことを本論文の目的にする。なお、 H^1 勾配法はさまざまな工学的な問題に適用されている [5, 8, 10–12, 31–34, 36–39, 41–53, 65–73, 78–83]。また、力法の数学的解釈に関しては既報 [40] でも試みられた。ここでは、領域写像のあるクラスの連続関数全体の集合の要素であると仮定して、領域写像の変動に対する評価関数の Gâteaux 微分を用いて力法の正当性について議論された。本論文では、領域写像の変動を適切な Hilbert 空間で定義して、評価関数の Fréchet 微分を用いた勾配法を考える。力法はその一例であったことを示す。

本論文は次の章で構成される。2 章では、設計変数 (領域写像) の許容集合および関数と汎関数に対する形状微分の定義を示す。その定義を用いて、領域写像の Jacobi 行列に関する形状微分の公式を 3 章で求める。4 章では、その公式を使って関数や汎関数の形状微分に関する命題を示す。5 章では、関数の形状微分を使って関数の変動則を定義する。6 章では、その変動則を仮定して主問題を定義する。本論文では、簡単のために Poisson 問題を用いることにする。7 章では、評価関数を設計変数と主問題の解の汎関数によって定義して、それらを用いて形状最適化問題を定義する。8 章では、7 章で定義された評価関数の形状微分を評価する式を求める。その結果、評価関数の形状微分は正則性が不足することが明らかになる。9 章では、それを正則化する機能をもつ勾配法 (H^1 勾配法) を示す。最後に、10 章でその勾配法を使ったアルゴリズムを示す。

なお、本論文では関数解析の結果を積極的に利用する。それらの中には現在も研究が続けられているものも含まれている。本論文においてそれらの結果を利用している場合に

*2 設計変数に密度に関する関数を選んだとき、力法の力に対応する概念が熱方程式の発熱になるために力法とはよべなかった。

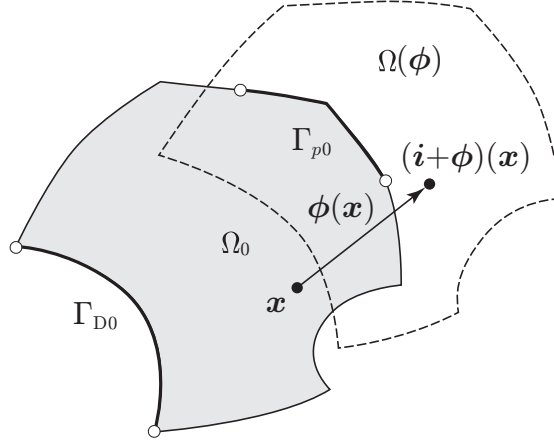


Fig. 1. Domain variation (displacement) $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

は、それらの結果が成り立つことを仮定していると理解していただきたい。

2. 領域写像の集合と形状微分の定義

境界変動型の形状最適化問題を構成するために、設計変数の集合を定義する。また、変動する領域の上で定義された関数や汎関数の領域変動に対する Fréchet 微分を形状微分とよぶことにして、それらの定義を示しておく。

2.1 初期領域

図 1 に示すように、 $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ を初期領域を表す $d \in \{2, 3\}$ 次元の Lipschitz 領域 (例えば, [24] Definition 1.2.1.1 p.5, [57] 定義 6.28 p.146) とする。 Ω_0 は与えられていると仮定する。初期領域の境界 $\partial\Omega_0$ に対して、 $\Gamma_{D0} \subset \partial\Omega_0$ を Dirichlet 境界、 $\Gamma_{N0} = \partial\Omega_0 \setminus \bar{\Gamma}_{D0}$ を Neumann 境界とする。なお、本論文では、集合に付けられた記号 $(\bar{\cdot})$ は閉包を表すことにする。また、 $\Gamma_{p0} \subset \Gamma_{N0}$ を非同次 Neumann 境界とする。さらに、 $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ に対して η_{Ni} を、後に (7.1) で定義される $m+1$ 個の評価関数 f_0 (目的関数) および f_1, \dots, f_m (制約関数) の中の境界積分で使われる被積分関数とし、 $\Gamma_{\eta i0} \subset \Gamma_{N0}$ 上で非零とする。 Γ_{p0} あるいは $\Gamma_{\eta i0}$ が変動すると仮定する場合には、これらの境界は区分的に C^2 級であると仮定する。

2.2 領域写像の集合

Ω_0 が変動した後の領域を次のように定義する。本論文では i を恒等写像を表すことにする。このとき、 Ω_0 が変動した後の領域を、連続な 1 対 1 写像 $i + \phi : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$ によって、 $(i + \phi)(\Omega_0) = \{(i + \phi)(x) \mid x \in \Omega_0\}$ のようにつくることにする。すなわち、 ϕ は

領域写像の変位を表すものとする. $(\mathbf{i} + \phi)(\Omega_0)$ は ϕ によってつくられた領域であることから, $\Omega(\phi)$ とかくことにする. 同様に, $(\cdot)(\phi)$ は $\{(\mathbf{i} + \phi)(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in (\cdot)_0\}$ を意味するものとする.

設計変数にこのような ϕ を選んだ場合, 領域写像を繰り返すたびに, 定義域が動いてしまうことになる. このことは, 一般的な関数最適化問題の枠組みには入らないことになる. しかし, 次の結果 [1] により, ϕ の定義域を \mathbb{R}^d に拡張すれば通常関数最適化問題の条件は満たされることになる.

命題 2.1 (Calderón の拡張定理) $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ を Lipschitz 領域とする. このとき, 任意の $s \in \{1, 2, \dots\}$ と $p \in (1, \infty)$ に対して有界線形作用素

$$e_{\Omega_0} : W^{s,p}(\Omega_0; \mathbb{R}) \rightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$$

が存在し, 任意の $u \in W^{s,p}(\Omega_0; \mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned} e_{\Omega_0}(u) &= u \quad \text{in } \Omega_0, \\ \|e_{\Omega_0}(u)\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})} &\leq c \|u\|_{W^{s,p}(\Omega_0; \mathbb{R})} \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, c は s と p に依存した定数である.

命題 2.1 に基づいて, ϕ の定義域を Ω_0 から \mathbb{R}^d に拡張する. さらに, ϕ は連続な 1 対 1 写像で, かつ境界 $\partial\Omega(\phi)$ では $\partial\Omega_0$ に対する条件 $(\Gamma_{p0} \cup \Gamma_{\eta00} \cup \Gamma_{\eta10} \cup \dots \cup \Gamma_{\eta m0})$ 上で区分的に C^2 級) が満たされていることを仮定する. このような条件を満たす設計変数 ϕ の許容集合は, $Y = W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ とおくことにして,

$$(2.1) \quad \mathcal{D} = \left\{ \phi \in Y \mid \|\phi\|_Y < \sigma, \phi = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \bar{\Omega}_{C0}, \right. \\ \left. (\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta0}(\phi) \cup \Gamma_{\eta1}(\phi) \cup \dots \cup \Gamma_{\eta m}(\phi)) \setminus \bar{\Omega}_{C0} \text{ is piecewise } C^2 \text{ class} \right\}$$

によって与えられると仮定する. ただし, σ は $\mathbf{i} + \phi$ の逆写像が全単射 (1 対 1 写像) になるように選んだ正定数とする ([54] Proposition 1.39 p. 23). $\bar{\Omega}_{C0} \subset \bar{\Omega}_0$ は設計上の要請で固定する領域あるいは境界を表すものとする. 本論文では, $\bar{\Omega}_{C0} = \emptyset$ とみなして議論を進める. ただし, 9.2 節では $\bar{\Omega}_{C0}$ は領域あるいは境界の測度がある正值をもつと仮定する.

また, 設計変数の変動に対する評価関数の Fréchet 微分を定義するために, 設計変数の変動が入る Banach 空間が必要となる. さらに, 後に関数空間上の勾配法を考える際に, その関数空間は Hilbert 空間であることが必要となる. そこで, 本論文では,

$$(2.2) \quad X = \left\{ \phi \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \mid \phi = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \bar{\Omega}_{C0} \right\}$$

を領域変動 (変位) を与える関数空間と定義する. すなわち, ある ϕ により $\Omega(\phi)$ が与えられたとき, そこからの任意の領域変動は図 2 のような $\varphi \in X$ で与えられると仮定す

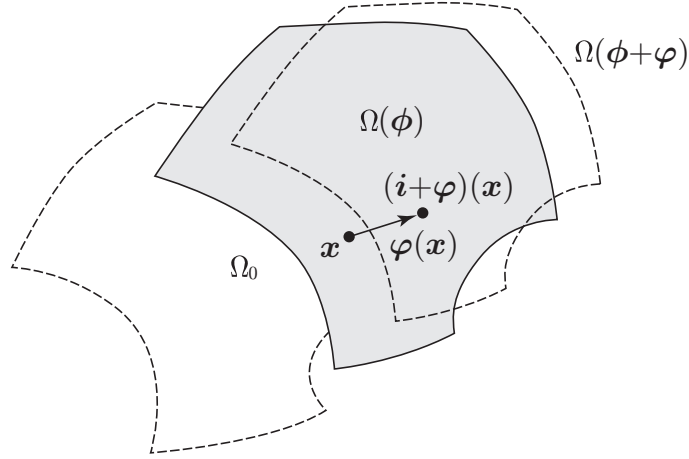


Fig. 2. Domain variation $\varphi \in X$ from $\Omega(\phi)$

る. このとき, $\varphi \in X$ の中から $\varphi \in \mathcal{D}$ となるような φ が見つけられたとき, 変動後の領域は $\Omega(\phi + \varphi)$ とかけることになる. 以下では, このようにかけたと仮定する. 後に, そのようにかけることが注意 9.1 で示される.

2.3 形状微分の定義

領域が動く問題では, その上で定義された関数や積分もそれに伴って変動する. ここでは, それらに対する形状微分の定義を示しておく.

ある $\phi \in \mathcal{D}$ を固定して, $\Omega(\phi)$ からの任意の領域変動 $\varphi \in X$ を考える. 領域が $\Omega(\phi)$ から $\Omega(\phi + \varphi)$ に変動したとき, その上で定義されていた関数も動くと仮定する. このとき, ϕ のときの関数を $u(\phi)$ とかき, $\Omega(\phi)$ の拡張領域 \mathbb{R}^d 上の点 x で定義された関数を $u(\phi)(x)$ とかくことにする. この表記法を用いて, 関数の形状微分を次のように定義する. なお, 本論文では実数のノルム (絶対値) を $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$ で表す.

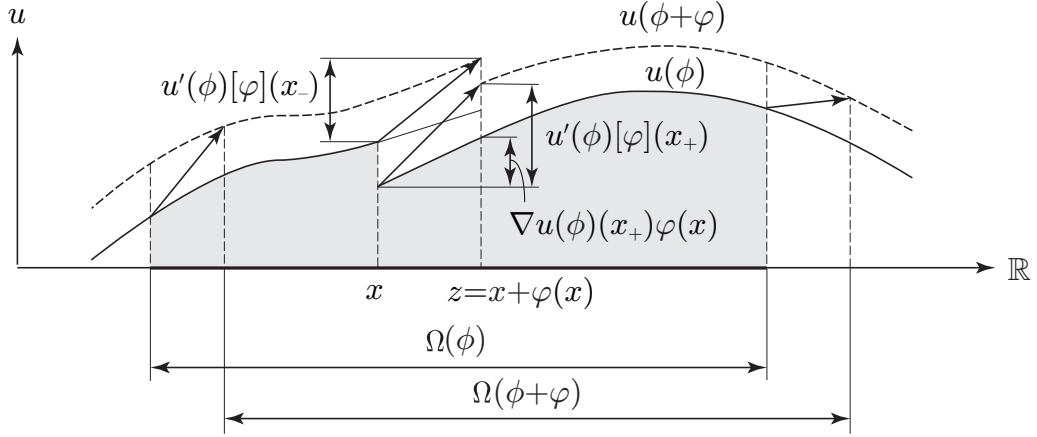
定義 2.1 (関数の形状微分) $\phi \in \mathcal{D}$ と $u : \mathcal{D} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ が与えられたとする. 任意の $\varphi \in X$ に対して, ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}^d$ において

$$u(\phi + \varphi)(x + \varphi(x)) = u(\phi)(x) + u'(\phi)[\varphi](x) + o(\|\varphi(x)\|_{\mathbb{R}})$$

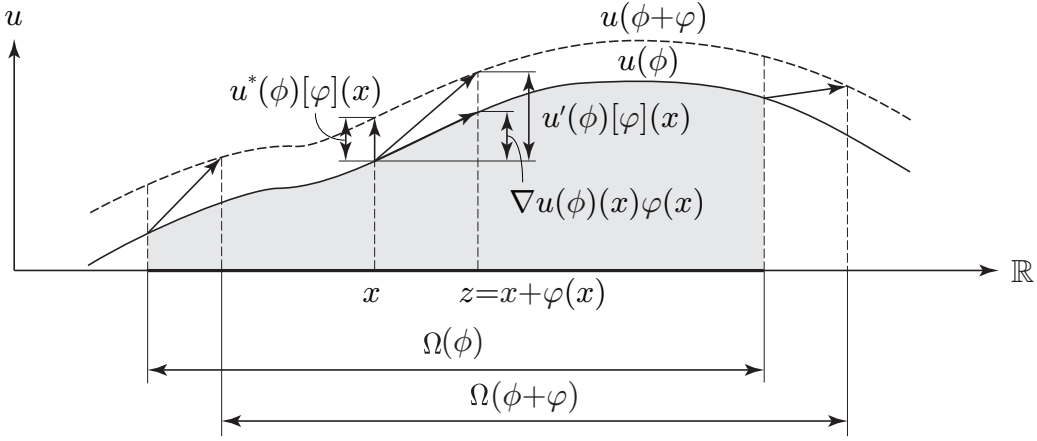
を満たす有界線形作用素 $u'(\phi)[\varphi] : X \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ が存在するとき, $u'(\phi)[\varphi]$ を $\phi \in \mathcal{D}$ における u の形状微分とよび, $u \in C^1(\mathcal{D}; L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ とかく.

図 3 (a) に u が, 簡単のために, 1次元領域で定義された関数のときの $u'(\phi)[\varphi]$ を示す. ここで, $u \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ が不連続関数であっても φ が連続関数であれば $u'(\phi)[\varphi]$ を定義できることがわかる.

次に, 領域が変動しても $\Omega(\phi)$ の拡張領域 \mathbb{R}^d 上の点 x を固定して $u(\phi + \varphi)(x)$ の



(a) In case of discontinuous function $u(\phi)$



(b) In case of continuous function $u(\phi)$

Fig. 3. Function $u(\phi)$ varying with domain

変化を追ったときの微分を考える．このときの u の φ に対する Fréchet 微分を次のように定義する．

定義 2.2 (関数の形状偏微分) $\phi \in \mathcal{D}$ と $u : \mathcal{D} \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ が与えられたとする．任意の $\varphi \in X$ に対して，ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}^d$ において

$$u(\phi + \varphi)(x) = u(\phi)(x) + u^*(\phi)[\varphi](x) + o(\|\varphi(x)\|_{\mathbb{R}})$$

を満たす有界線形作用素 $u^*(\phi)[\varphi] : X \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ が存在するとき， $u^*(\phi)[\varphi]$ を $\phi \in \mathcal{D}$ における u の形状偏微分とよび， $u \in C^1(\mathcal{D}; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ とかく．

図 3 (b) に u が 1 次元領域で定義された関数のときの $u^*(\phi)[\varphi]$ を示す．ここで， $u \in H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ は連続関数になるために $u^*(\phi)[\varphi]$ の定義は有効である．しかし，図 3

(a) のように, u が不連続関数の場合には, φ による領域変動の間に, u の不連続点が横切るような \boldsymbol{x} では, $u^*(\boldsymbol{\phi})[\varphi]$ が定義されないことに注意する必要がある.

また, 定義 2.2 の仮定が成り立つとき, すなわち $u \in C^1(\mathcal{D}; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ のときには,

$$(2.3) \quad u'(\boldsymbol{\phi})[\varphi] = u^*(\boldsymbol{\phi})[\varphi] + \nabla u(\boldsymbol{\phi}) \cdot \varphi$$

が成り立つ. なお, 本論文では, $\boldsymbol{x} = (x_i)_i \in \mathbb{R}^d$ に対して $(\partial(\cdot)/x_1, \dots, \partial(\cdot)/x_d)^\top$ を $\nabla(\cdot)$ とかくことにする.

さらに, 変動する領域の上で定義された汎関数に対する形状微分を次のように定義する. 本論文では, $\boldsymbol{z} \in \Omega(\boldsymbol{\phi} + \varphi)$ に対して, $(\cdot)_{\boldsymbol{z}} = (\partial(\cdot)/z_1, \dots, \partial(\cdot)/z_d)^\top$ とかくことにする. また, $\partial_\nu(\cdot) = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi}) \cdot \nabla(\cdot)$ とかくのに対して, $\partial_\mu(\cdot) = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi} + \varphi) \cdot (\cdot)_{\boldsymbol{z}}$ とかくことにする. さらに, X の双対空間を X' とかく.

定義 2.3 (汎関数の形状微分) $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}$ に対して,

$$\begin{aligned} h_0 &\in C^1(C^1(\mathcal{D}; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})) \times C^1(\mathcal{D}; L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)); L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})), \\ h_1 &\in C^1(C^1(\mathcal{D}; H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})) \times C^1(\mathcal{D}; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})); H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})) \end{aligned}$$

が与えられたとき, 任意の $\varphi \in X$ に対して,

$$(2.4) \quad \begin{aligned} &f(\boldsymbol{\phi} + \varphi, u(\boldsymbol{\phi} + \varphi), u_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{\phi} + \varphi), \partial_\mu u(\boldsymbol{\phi} + \varphi)) \\ &= \int_{\Omega(\boldsymbol{\phi} + \varphi)} h_0(u(\boldsymbol{\phi} + \varphi)(\boldsymbol{z}), u_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{\phi} + \varphi)(\boldsymbol{z})) \, d\boldsymbol{z} \\ &+ \int_{\Gamma(\boldsymbol{\phi} + \varphi)} h_1(u(\boldsymbol{\phi} + \varphi)(\boldsymbol{z}), \partial_\mu u(\boldsymbol{\phi} + \varphi)(\boldsymbol{z})) \, d\boldsymbol{\zeta} \end{aligned}$$

とおく. ここで, $\Gamma(\boldsymbol{\phi})$ を $\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})$ の部分集合 ($\Gamma(\boldsymbol{\phi}) = \partial\Omega(\boldsymbol{\phi})$ でもよい) とする. このとき,

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{\phi} + \varphi, u(\boldsymbol{\phi} + \varphi), u_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{\phi} + \varphi), \partial_\mu u(\boldsymbol{\phi} + \varphi)) \\ &= f(\boldsymbol{\phi}, u(\boldsymbol{\phi}), \nabla u(\boldsymbol{\phi}), \partial_\nu(\boldsymbol{\phi})) \\ &+ f'(\boldsymbol{\phi}, u(\boldsymbol{\phi}), \nabla u(\boldsymbol{\phi}), \partial_\nu(\boldsymbol{\phi}))[\varphi] + o(\|\varphi\|_X) \end{aligned}$$

を満たす有界線形汎関数 $f'(\boldsymbol{\phi}, u(\boldsymbol{\phi}), \nabla u(\boldsymbol{\phi}), \partial_\nu u(\boldsymbol{\phi}))[\varphi] : X \rightarrow \mathbb{R}$ が存在するとき, すなわち, $f'(\boldsymbol{\phi}, u(\boldsymbol{\phi}), \nabla u(\boldsymbol{\phi}), \partial_\nu u(\boldsymbol{\phi}))[\varphi] = \langle \boldsymbol{g}, \varphi \rangle$ とかける $\boldsymbol{g} \in X'$ が存在するとき, \boldsymbol{g} を形状微分 (あるいは形状勾配) という. このとき, $f \in C^1(\mathcal{D}; \mathbb{R})$ とかく.

3. Jacobi 行列式の形状微分

領域変動および関数と汎関数の形状微分の定義が示されたので, それに基づいて, 領域変動 $\varphi \in X$ に伴う Jacobi 行列式と Jacobi 逆行列の形状微分を求めておく. これらは関数と汎関数の形状微分の公式を求めるときに使われる.

ある $\phi \in \mathcal{D}$ を固定して, $\Omega(\phi)$ からの任意の領域変動 $\varphi \in X$ を考える. このとき, 写像 $\mathbf{i} + \varphi$ に対する Jacobi 行列と Jacobi 行列式をそれぞれ

$$(3.1) \quad \mathbf{F}(\varphi) = \mathbf{I} + (\nabla \varphi^T)^T \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d \times d}),$$

$$(3.2) \quad \omega(\varphi) = \det \mathbf{F}(\varphi) \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$$

とかくことにする^{*3}. ここで, \mathbf{I} は単位行列を表す. このとき, $\omega(\varphi)$ は, $\Omega(\phi)$ の測度 dx と $\Omega(\phi + \varphi)$ 上の対応する測度 dz に対して $dz = \omega(\varphi) dx$ を与える関数となる. ここでは, 領域上と境界上で定義された Jacobi 行列式に分けて, それらの形状微分についてみていくことにする.

3.1 領域 Jacobi 行列式と領域 Jacobi 逆行列の形状微分

まず, (3.2) で定義された $\omega(\varphi)$ の $\varphi_0 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ における形状微分は次のように得られる.

命題 3.1 (領域 Jacobi 行列式の形状微分) $\phi \in \mathcal{D}$ が与えられたとする. 任意の $\varphi \in X$ に対して,

$$\omega'(\varphi_0)[\varphi] = \nabla \cdot \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$$

が成り立つ.

証明 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\begin{aligned} \omega(\varphi) &= \det(\mathbf{I} + \nabla \varphi^T) = \det \begin{pmatrix} 1 + \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{d,1} & \cdots & 1 + \varphi_{d,d} \end{pmatrix} \\ &= 1 + \nabla \cdot \varphi + \sum_{(i,j) \in \{1, \dots, d\}^2} o(\|\varphi_{i,j}\|_{L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})}) \end{aligned}$$

が成り立つ. □

また, Jacobi 逆行列 $\mathbf{F}^{-T}(\varphi)$ の $\varphi_0 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ における形状微分は次のようになる.

命題 3.2 (領域 Jacobi 逆行列の形状微分) $\phi \in \mathcal{D}$ が与えられたとする. 任意の $\varphi \in X$ に対して,

$$\mathbf{F}^{-T'}(\varphi_0)[\varphi] = -\nabla \varphi^T \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d \times d})$$

が成り立つ.

^{*3} 通常は $\mathbf{F}(\mathbf{i} + \varphi)$ とかくが, ここでは, 弾性論の変形勾配テンソルの表記法を用いることにする.

証明 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\boldsymbol{F}^{-\text{T}}(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{\varphi}^{\text{T}}) = \boldsymbol{I}$$

が成り立つ。 $\boldsymbol{\phi}$ で $\boldsymbol{\varphi}$ に対する形状微分をとれば,

$$\boldsymbol{F}^{-\text{T}' }(\boldsymbol{\varphi}_0)[\boldsymbol{\varphi}] + \boldsymbol{F}^{-\text{T}}(\boldsymbol{\varphi}_0)(\nabla \boldsymbol{\varphi}^{\text{T}}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{d \times d}}$$

となる。 $\boldsymbol{F}^{-\text{T}}(\boldsymbol{\varphi}_0) = \boldsymbol{I}$ より結果を得る。 □

3.2 境界 Jacobi 行列式と法線の形状微分

次に、境界の Jacobi 行列式に関する形状微分の公式を求めておく。境界変動型の形状最適化問題では評価関数や主問題の Lagrange 関数に境界積分が現れる。そのような境界積分の形状微分を求める際に、境界 Jacobi 行列式と法線の形状微分が必要となるためである。

$\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})$ の微小測度と外向き単位法線を $d\gamma(\boldsymbol{\phi})$ と $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi})$ のように表す。なお、Lipschitz 境界上の法線は、境界近傍の座標系で境界をグラフとして定義したときのグラフに対する法線で定義され、 $L^\infty(\partial\Omega(\boldsymbol{\phi}); \mathbb{R}^d)$ に入ると仮定する [22, 56].

このとき、

$$(3.3) \quad \varpi(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{d\gamma(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi})}{d\gamma(\boldsymbol{\phi})} = \omega(\boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}) \cdot (\boldsymbol{F}^{-\text{T}}(\boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi}))$$

が成り立つ。この関係は、次の命題から得られる。

命題 3.3 (Nanson の公式) $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}$ が与えられたとする。 $\partial\Omega(\boldsymbol{\phi})$ 上のほとんどいたるところで、任意の $\boldsymbol{\varphi} \in X$ に対して、

$$(3.4) \quad \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}) d\gamma(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}) = \omega(\boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{F}^{-\text{T}}(\boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi}) d\gamma(\boldsymbol{\phi})$$

が成り立つ。

証明 $d\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\phi}) \in \mathbb{R}^d$ を $d\gamma(\boldsymbol{\phi})$ 上の $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi}) \cdot d\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\phi}) > 0$ を満たす任意ベクトルとして、 $d\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi})$ を写像 $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{\varphi}$ により変換されたベクトルとする。このとき、図 4 に示す平行 6 面体の体積について

$$d\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}) d\gamma(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}) = \omega(\boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\phi}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi}) d\gamma(\boldsymbol{\phi})$$

が成り立つ。ここで、 $d\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\phi})$ を上式に代入すれば、

$$d\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\phi}) \cdot (\boldsymbol{F}^{\text{T}}(\boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi})) d\gamma(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}) = d\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\phi}) \cdot (\omega(\boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\phi})) d\gamma(\boldsymbol{\phi})$$

を得る。 $d\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\phi})$ は任意なので (3.4) を得る。 □

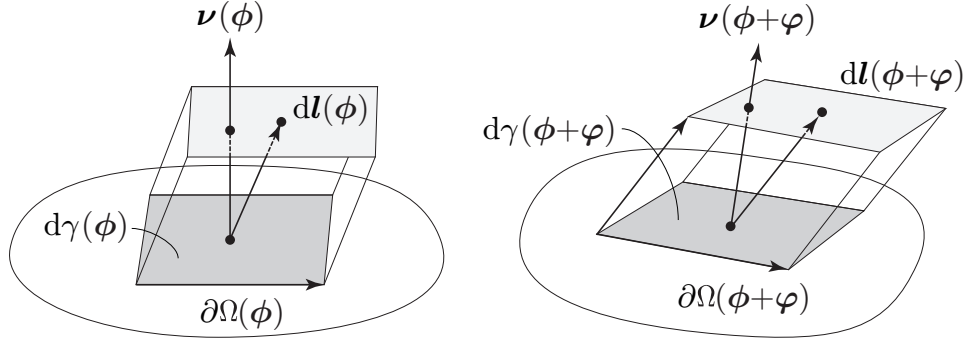


Fig. 4. Small measures $d\gamma(\phi)$ and $d\gamma(\phi + \varphi)$

(3.4) の両辺と $\nu(\phi + \varphi)$ の内積をとれば (3.3) を得る. また, (3.4) より, $\nu(\phi + \varphi)$ は $F^{-T}(\varphi)\nu(\phi)$ の方向をもった単位ベクトルであることから

$$(3.5) \quad \nu(\phi + \varphi) = \frac{F^{-T}(\varphi)\nu(\phi)}{\|F^{-T}(\varphi)\nu(\phi)\|_{\mathbb{R}^d}}$$

が成り立つ.

これらの関係に基づけば, (3.3) の $\varpi(\varphi)$ の形状微分は次のように得られる. 以下では, $\partial\Omega(\phi)$ の接線を $\tau_1(\phi), \dots, \tau_{d-1}(\phi)$ のようにかくことにする. また, 平均曲率の $d-1$ 倍^{*4} を $\kappa(\phi) = \nabla \cdot \nu(\phi)$ のようにかくことにする. なお, Lipschitz 境界上の接線は, 法線と同様に, 境界近傍の座標系で境界をグラフとして定義したときのグラフの接線として定義され, $L^\infty(\partial\Omega(\phi); \mathbb{R}^d)$ に入ると仮定する. 平均曲率も法線の導関数に対して同様に定義され, 区分的に C^2 級の境界に対して, $L^\infty(\partial\Omega(\phi); \mathbb{R})$ に入ると仮定する. また, $\nabla_\tau(\cdot) = (\tau_i(\phi) \cdot \nabla)_i(\cdot) \in \mathbb{R}^{d-1}$ および $\varphi_\tau = (\tau_i(\phi) \cdot \varphi)_i \in \mathbb{R}^{d-1}$ とかくことにする. これ以降, $\nu(\phi), \tau_i(\phi)$ および $\kappa(\phi)$ は単に ν, τ_i および κ とかくことにする.

命題 3.4 (境界 Jacobi 行列式の形状微分) $\phi \in \mathcal{D}$ が与えられたとする. $\partial\Omega(\phi)$ 上のほとんどいたるところで, 任意の $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ に対して,

$$(3.6) \quad \varpi'(\varphi_0)[\varphi] = (\nabla \cdot \varphi)_\tau = \nabla \cdot \varphi - \nu \cdot (\nabla \varphi^T \nu) \in L^2(\partial\Omega(\phi); \mathbb{R})$$

が成り立つ. さらに, $\partial\Omega(\phi)$ が区分的に C^2 級ならば,

$$(3.7) \quad \varpi'(\varphi_0)[\varphi] = \kappa \nu \cdot \varphi + \nabla_\tau \cdot \varphi_\tau \in L^2(\partial\Omega(\phi); \mathbb{R})$$

が成り立つ.

証明 (3.3) と (3.5) より

$$\varpi(\varphi) = \omega(\varphi) \|F^{-T}(\varphi)\nu\|_{\mathbb{R}^d}$$

^{*4} 原論文から赤字部分が修正された.

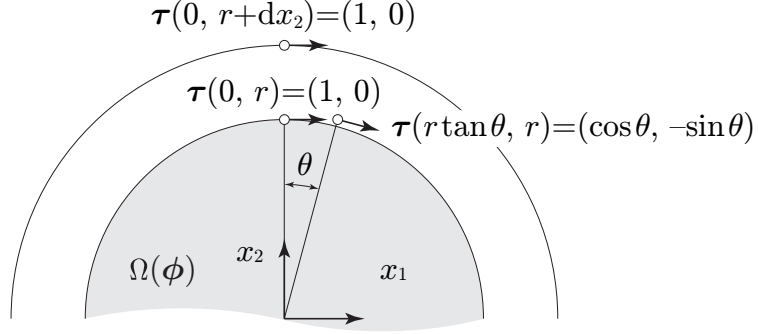


Fig. 5. Distribution of tangent in neighborhood of circle

を得る. 命題 3.1 と命題 3.2 より

$$\begin{aligned}
\varpi'(\varphi_0)[\varphi] &= \omega'(\varphi_0)[\varphi] \|\mathbf{F}^{-\text{T}}(\varphi_0)\boldsymbol{\nu}\|_{\mathbb{R}^d} \\
&\quad + \omega(\varphi_0)(\mathbf{F}^{-\text{T}}(\varphi_0)\boldsymbol{\nu}) \cdot (\mathbf{F}^{-\text{T}'}(\varphi_0)[\varphi]\boldsymbol{\nu}) / \|\mathbf{F}^{-\text{T}}(\varphi_0)\boldsymbol{\nu}\|_{\mathbb{R}^d} \\
&= \nabla \cdot \varphi - \boldsymbol{\nu} \cdot (\nabla \varphi^{\text{T}} \boldsymbol{\nu})
\end{aligned}$$

が成り立つ. さらに, その境界が区分的に C^2 級ならば, ほとんどいたるところ $\kappa = \nabla \cdot \boldsymbol{\nu}$ が定義できて,

$$\begin{aligned}
(3.8) \quad \nabla \cdot \varphi &= \nabla \cdot \left\{ (\boldsymbol{\nu} \cdot \varphi) \boldsymbol{\nu} + \sum_{i \in \{1, \dots, d-1\}} (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \varphi) \boldsymbol{\tau}_i \right\} \\
&= \partial_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\nu} \cdot \varphi) + \kappa(\boldsymbol{\nu} \cdot \varphi) + \nabla_{\boldsymbol{\tau}} \cdot \varphi_{\boldsymbol{\tau}}
\end{aligned}$$

とかける. ただし, $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_i = 0$ を用いた. なぜならば, $\Omega(\phi)$ が図 5 のような半径 r の円 (2次元領域) のとき, $\mathbf{x} = (0, r)^{\text{T}}$ では,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_1 = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{r \tan \theta} = 0$$

が成り立つためである. $\Omega(\phi)$ が 3次元領域の場合も同様の関係が成り立つ. また,

$$\begin{aligned}
(3.9) \quad \boldsymbol{\nu} \cdot (\nabla \varphi^{\text{T}} \boldsymbol{\nu}) &= \boldsymbol{\nu} \cdot \left[\nabla \left\{ (\boldsymbol{\nu} \cdot \varphi) \boldsymbol{\nu} + \sum_{i \in \{1, \dots, d-1\}} (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \varphi) \boldsymbol{\tau}_i \right\}^{\text{T}} \boldsymbol{\nu} \right] \\
&= \partial_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\nu} \cdot \varphi)
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここでは,

$$\begin{aligned}
\nabla(\boldsymbol{\nu} \cdot \varphi) \boldsymbol{\nu}^{\text{T}} \boldsymbol{\nu} &= \nabla(\boldsymbol{\nu} \cdot \varphi), \\
\nabla \boldsymbol{\nu}^{\text{T}} \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}, \\
\nabla(\boldsymbol{\tau}_i \cdot \varphi) \boldsymbol{\tau}_i^{\text{T}} \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}, \\
\boldsymbol{\nu} \cdot (\nabla \boldsymbol{\tau}_i^{\text{T}} \boldsymbol{\nu}) &= 0
\end{aligned}$$

を用いた. $\boldsymbol{\nu} \cdot (\nabla \tau_i^T \boldsymbol{\nu}) = 0$ が成り立つことは, $\Omega(\phi)$ が図 5 のような半径 r の円のとき, $\boldsymbol{x} = (0, r)^T$ では,

$$\boldsymbol{\nu} \cdot (\nabla \tau_i^T \boldsymbol{\nu}) = (\nu_1 \quad \nu_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & -1/r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

が成り立つことで確かめられる. $\Omega(\phi)$ が 3 次元領域の場合も同様の関係が成り立つ. そこで, (3.8) と (3.9) を (3.6) に代入すれば (3.7) を得る. \square

また, 法線の形状微分について, 次の公式を得る.

命題 3.5 (法線の形状微分) $\phi \in \mathcal{D}$ が与えられたとする. $\partial\Omega(\phi)$ 上のほとんどいたるところで, 任意の $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ に対して,

$$\boldsymbol{\nu}'(\phi)[\varphi] = -\nabla \varphi^T \boldsymbol{\nu} + \{\boldsymbol{\nu} \cdot (\nabla \varphi^T \boldsymbol{\nu})\} \boldsymbol{\nu}$$

が成り立つ.

証明 $\Omega(\phi + \varphi)$ 上の外向き単位法線は (3.5) で与えられる. これを

$$\boldsymbol{\nu}(\phi + \varphi) = \frac{\mathbf{F}^{-T}(\varphi) \boldsymbol{\nu}}{\|\mathbf{F}^{-T}(\varphi) \boldsymbol{\nu}\|_{\mathbb{R}^d}} = \frac{\mathbf{h}(\varphi)}{\|\mathbf{h}(\varphi)\|_{\mathbb{R}^d}}$$

とかく. このとき,

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\nu}'(\varphi_0)[\varphi] \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{h}(\varphi_0)\|_{\mathbb{R}^d}^2} \left(\mathbf{h}'(\varphi_0)[\varphi] \|\mathbf{h}(\varphi_0)\|_{\mathbb{R}^d} - \frac{\mathbf{h}(\varphi_0)^T (\mathbf{h}'(\varphi_0)[\varphi]) \mathbf{h}(\varphi_0)}{\|\mathbf{h}(\varphi_0)\|_{\mathbb{R}^d}} \right) \\ &= -\nabla \varphi^T \boldsymbol{\nu} + \{\boldsymbol{\nu} \cdot (\nabla \varphi^T \boldsymbol{\nu})\} \boldsymbol{\nu} \end{aligned}$$

が成り立つ. \square

4. 汎関数の形状微分

3 章の結果を用いて変動する領域の上で定義された領域積分と境界積分の形状微分を求める公式をまとめておく. その際, 被積分関数の形状微分を用いる公式と形状偏微分を用いる公式が得られることに注意する.

4.1 関数の形状微分を用いた公式

まず, 関数の形状微分を使った公式を求める. 定義 2.1 より, 次の命題が成り立つ.

命題 4.1 (導関数なし領域積分の形状微分) $\phi \in \mathcal{D}$ と $u \in C^1(\mathcal{D}; L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ が与えられたとき, 任意の $\varphi \in X$ に対して,

$$f(\phi + \varphi, u(\phi + \varphi)) = \int_{\Omega(\phi + \varphi)} u(\phi + \varphi) dz$$

とおく. このとき, f の形状微分 (定義 2.3) は

$$(4.1) \quad f'(\phi, u(\phi))[\varphi] = \int_{\Omega(\phi)} (u'(\phi)[\varphi] + u(\phi) \nabla \cdot \varphi) dx$$

となる. ここで, $u'(\phi)[\varphi]$ は定義 2.1 に従う.

証明 f の積分領域 $\Omega(\phi + \varphi)$ を $\Omega(\phi)$ に変換すれば,

$$f(\phi + \varphi, u(\phi + \varphi)) = \int_{\Omega(\phi)} u(\phi + \varphi)(\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x})) \omega(\varphi)(\mathbf{x}) dx$$

となる. 定義 2.1 を用いれば,

$$f'(\phi, u(\phi))[\varphi] = \int_{\Omega(\phi)} (u'(\phi)[\varphi] \omega(\varphi_0) + u(\phi) \omega'(\varphi_0)[\varphi]) dx$$

を得る. これに命題 3.1 を用いれば本命題の結果を得る. \square

次に, 関数の導関数を被積分関数にもつ領域積分について考える. まず, 次の結果に注目する. 以下では, 任意の $\varphi \in X$ に対して, $\Omega(\phi)$ の拡張領域 \mathbb{R}^d 上の点 \mathbf{x} の移動先を $z = \mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{i} + \varphi)(\mathbf{x})$ とかく. また, $(\cdot)_z$ は $\partial(\cdot)/\partial z$ を表す.

命題 4.2 (微分の引き戻し) $\phi \in \mathcal{D}$ と $u \in C^0(\mathcal{D}; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ が与えられたとする. 任意の $\varphi \in X$ を選んだとき,

$$(4.2) \quad u(\phi + \varphi)(z) = u(\phi)\left((\mathbf{i} + \varphi)^{-1}(z)\right) = u(\phi)(\mathbf{x})$$

が成り立つとする. このとき, 任意の $\varphi \in X$ に対して,

$$u_z(\phi + \varphi)(z) = \mathbf{F}^{-\text{T}}(\varphi) \nabla u(\phi)(\mathbf{x}) \in L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$$

が成り立つ.

証明 微分の連鎖則より,

$$\frac{\partial u(\phi + \varphi)}{\partial z}(z) = \frac{\partial \mathbf{x}^{\text{T}}}{\partial z} \frac{\partial u(\phi)}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial z}{\partial \mathbf{x}^{\text{T}}} \right)^{-\text{T}} \frac{\partial u(\phi)}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$$

が成り立つ. \square

そこで、領域積分の被積分関数に導関数が含まれる場合には、次の公式を得る [54,55,60].

命題 4.3 (導関数あり領域積分の形状微分) $\phi \in \mathcal{D}$ と $u \in C^1(\mathcal{D}; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ が与えられたとき、任意の $\varphi \in X$ に対して、

$$f(\phi + \varphi, u_z(\phi + \varphi)) = \int_{\Omega(\phi + \varphi)} u_z(\phi + \varphi) dz$$

とおく. このとき、 f の形状微分は

$$f'(\phi, \nabla u(\phi))[\varphi] = \int_{\Omega(\phi)} (\nabla u'(\phi)[\varphi] - \nabla \varphi^T \nabla u(\phi) + (\nabla \cdot \varphi) \nabla u(\phi)) dx$$

となる.

証明 命題 4.2 において (4.2) が仮定されていたことに注意すれば、

$$\begin{aligned} f(\phi + \varphi, u_z(\phi + \varphi)) &= \int_{\Omega(\phi + \varphi)} \left[u_z(\phi + \varphi)(z) \Big|_{(4.2)} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ u(\phi + \varphi)(z) - u(\phi)\left((i + \varphi)^{-1}(z)\right) \right\}_z \right] dz \\ &= \int_{\Omega(\phi)} \left\{ F^{-T}(\varphi) \nabla u(\phi)(x) \right. \\ &\quad \left. + u_{x+\varphi(x)}(\phi + \varphi)(x + \varphi(x)) - u_{x+\varphi(x)}(\phi)(x) \right\} \omega(\varphi) dx \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし、 $u_z(\phi + \varphi)(z) \Big|_{(4.2)}$ は (4.2) を仮定したもとの $u_z(\phi + \varphi)(z)$ とする. f の形状微分の定義 (定義 2.3) と $u'(\phi)[\varphi]$ の定義 (定義 2.1) より、

$$\begin{aligned} f'(\phi, \nabla u(\phi))[\varphi] &= \int_{\Omega(\phi)} \left\{ (F^{-T}(\varphi_0)[\varphi] \nabla u(\phi) + \nabla u'(\phi)[\varphi]) \omega(\varphi_0) \right. \\ &\quad \left. + F^{-T}(\varphi_0) \nabla u(\phi) \omega'(\varphi_0)[\varphi] \right\} dx \end{aligned}$$

を得る. この結果に、命題 3.1 と命題 3.2 を適用して本命題の結果を得る. \square

被積分関数が u と ∇u の関数で与えられる場合には、命題 4.1 と命題 4.3 の証明に微分の連鎖律を適用して、次の結果を得る.

命題 4.4 (領域積分の形状微分) $\phi \in \mathcal{D}$ と $u \in C^1(\mathcal{D}; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ に対して、 $h \in C^1(C^1(\mathcal{D}; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})) \times C^1(\mathcal{D}; L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)); L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ が与えられたとき、任意の $\varphi \in X$ に対して、

$$f(\phi + \varphi, u(\phi + \varphi), u_z(\phi + \varphi)) = \int_{\Omega(\phi + \varphi)} h(u(\phi + \varphi), u_z(\phi + \varphi)) dz$$

とおく. このとき, f の形状微分は

$$\begin{aligned} f'(\phi, u(\phi), \nabla u(\phi))[\varphi] &= \int_{\Omega(\phi)} (h_u(u(\phi), \nabla u(\phi)) [u'(\phi)[\varphi]] \\ &\quad + h_{\nabla u}(u(\phi), \nabla u(\phi)) [\nabla u'(\phi)[\varphi] - \nabla \varphi^T \nabla u(\phi)] \\ &\quad + h(u(\phi), \nabla u(\phi)) \nabla \cdot \varphi) dx \end{aligned}$$

となる.

次に, 汎関数が境界積分で与えられた場合を考える. ここでも, 関数の形状微分を用いて次の公式を得る. $\Gamma(\phi)$ は $\partial\Omega(\phi)$ の部分集合 ($\Gamma(\phi) = \partial\Omega(\phi)$ でもよい) とする.

命題 4.5 (導関数なし境界積分の形状微分) $\phi \in \mathcal{D}$ と $u \in C^1(\mathcal{D}; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ が与えられたとき, 任意の $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ に対して,

$$f(\phi + \varphi, u(\phi + \varphi)) = \int_{\Gamma(\phi + \varphi)} u(\phi + \varphi) d\zeta$$

とおく. このとき, f の形状微分は

$$f'(\phi, u(\phi))[\varphi] = \int_{\Gamma(\phi)} (u'(\phi)[\varphi] + u(\phi)(\nabla \cdot \varphi)_\tau) d\gamma$$

となる. ただし, $u'(\phi)[\varphi](x)$ は定義 2.1 に従う. また, $(\nabla \cdot \varphi)_\tau$ は (3.6) に従う. さらに, $\Gamma(\phi)$ が区分的に C^2 級ならば, 任意の $\varphi \in X$ に対して,

$$\begin{aligned} f'(\phi, u(\phi))[\varphi] &= \int_{\Gamma(\phi)} (u'(\phi)[\varphi] + \kappa u(\phi) \nu \cdot \varphi - \nabla_\tau u(\phi) \cdot \varphi_\tau) d\gamma \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma(\phi) \cup \Theta(\phi)} u(\phi) \tau \cdot \varphi d\zeta \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $\Theta(\phi)$ は $\Omega(\phi)$ が 2 次元領域のとき $\partial\Omega(\phi)$ 上の角点, $\Omega(\phi)$ が 3 次元領域のとき $\partial\Omega(\phi)$ 上の頂点と辺の集合とする. τ は $\Omega(\phi)$ が 2 次元領域のとき $\Gamma(\phi)$ の外向き接線, $\Omega(\phi)$ が 3 次元領域のとき $\Gamma(\phi)$ の外向き接線かつ $\partial\Gamma(\phi)$ の外向き法線とする. $d\zeta$ は $\partial\Gamma(\phi) \cup \Theta(\phi)$ の測度を表す.

証明 f の積分領域 $\Gamma(\phi + \varphi)$ を $\Gamma(\phi)$ に変換すれば,

$$f(\phi + \varphi, u(\phi + \varphi)) = \int_{\Gamma(\phi)} u(\phi + \varphi)(x + \varphi(x)) \varpi(\varphi) d\gamma$$

が成り立つ. f の形状微分の定義 (定義 2.3) と $u'(\phi)[\varphi]$ の定義 (定義 2.1) より,

$$f'(\phi, u(\phi))[\varphi] = \int_{\Gamma(\phi)} \{u'(\phi)[\varphi] \varpi(\varphi_0) + u(\phi) \varpi'(\varphi_0)[\varphi]\} d\gamma$$

を得る。これに命題 3.4 を適用すれば前半の結果を得る。さらに、 $\Gamma(\phi)$ が区分的に C^2 級ならば、 $\int_{\Gamma(\phi)} u(\phi) \nabla_{\tau} \cdot \varphi_{\tau} d\gamma$ に対して Gauss-Green の定理を適用すれば、後半の結果を得る。□

さらに、境界積分の被積分関数が法線方向の導関数の場合には、次のようになる。

命題 4.6 (導関数あり境界積分の形状微分) $\phi \in \mathcal{D}$ と $u \in C^1(\mathcal{D}; H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ が与えられたとき、任意の $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ に対して、

$$f(\phi + \varphi, \partial_{\mu} u(\phi + \varphi)) = \int_{\Gamma(\phi + \varphi)} \partial_{\mu} u(\phi + \varphi) d\zeta$$

とおく。このとき、 f の形状微分は

$$f'(\phi, \partial_{\nu} u(\phi))[\varphi] = \int_{\Gamma(\phi)} (\partial_{\nu} u'(\phi)[\varphi] + w(\varphi, u) + \partial_{\nu} u(\phi) (\nabla \cdot \varphi)_{\tau}) d\gamma$$

となる。ただし、

$$(4.3) \quad w(\varphi, u) = \left[\{\nu \cdot (\nabla \varphi^T \nu)\} \nu - \left\{ (\nabla \varphi^T + (\nabla \varphi^T)^T) \nu \right\} \cdot \nabla u(\phi) \right]$$

とおいた。また、 $(\nabla \cdot \varphi)_{\tau}$ は (3.6) に従う。さらに、 $\Gamma(\phi)$ が区分的に C^2 級ならば、

$$\begin{aligned} f'(\phi, \partial_{\nu} u(\phi))[\varphi] &= \int_{\Gamma(\phi)} \left\{ \partial_{\nu} u'(\phi)[\varphi] + w(\varphi, u) + \kappa \partial_{\nu} u(\phi) \nu \cdot \varphi \right. \\ &\quad \left. - \nabla_{\tau} (\partial_{\nu} u(\phi)) \cdot \varphi_{\tau} \right\} d\gamma + \int_{\partial\Gamma(\phi) \cup \Theta(\phi)} \partial_{\nu} u(\phi) \tau \cdot \varphi d\zeta \end{aligned}$$

が成り立つ。

証明 命題 4.2 において (4.2) が仮定されていたことに注意すれば、

$$\begin{aligned} f(\phi + \varphi, \partial_{\mu} u(\phi + \varphi)) &= \int_{\Gamma(\phi + \varphi)} \left[u_z(\phi + \varphi)(z) \Big|_{(4.2)} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ u(\phi + \varphi)(z) - u(\phi) \left((i + \varphi)^{-1}(z) \right) \right\}_z \right] \cdot \nu(\phi + \varphi)(z) d\zeta \\ &= \int_{\Gamma(\phi)} \left\{ (F^{-T}(\varphi) \nabla u(\phi)) \cdot (\nu + \nu'(\phi)[\varphi] + o(\|\varphi\|_X)) \right. \\ &\quad \left. + \partial_{\mu} u(\phi + \varphi)(\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x})) - \partial_{\mu} u(\mathbf{x}) \right\} \varpi(\varphi) d\gamma \end{aligned}$$

を得る。ただし、 $u_z(\phi + \varphi)(z) \Big|_{(4.2)}$ は (4.2) を仮定したもとの $u_z(\phi + \varphi)(z)$ とす

る. f の形状微分の定義 (定義 2.3) と $u'(\phi)[\varphi]$ の定義 (定義 2.1) より,

$$\begin{aligned} f'(\phi, \partial_\nu u(\phi))[\varphi] &= \int_{\Gamma(\phi)} \left\{ \left((\mathbf{F}^{-T'}(\varphi_0)[\varphi] \nabla u) \cdot \boldsymbol{\nu} + \partial_\nu u'(\phi)[\varphi] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\mathbf{F}^{-T}(\varphi_0) \nabla u(\phi)) \cdot \boldsymbol{\nu}'(\phi)[\varphi] \right) \varpi(\varphi_0) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{F}^{-T}(\varphi_0) \partial_\nu u(\phi) \varpi'(\varphi_0)[\varphi] \right\} d\gamma \end{aligned}$$

を得る. これに命題 3.2, 命題 3.4 および命題 3.5 を適用すれば,

$$\begin{aligned} f'(\phi, \partial_\nu u(\phi))[\varphi] &= \int_{\Gamma(\phi)} \left[-(\nabla \varphi^T \nabla u(\phi)) \cdot \boldsymbol{\nu} + \partial_\nu u'(\phi)[\varphi] \right. \\ &\quad \left. + \{-\nabla \varphi^T \boldsymbol{\nu} + (\boldsymbol{\nu} \cdot (\nabla \varphi^T \boldsymbol{\nu})) \boldsymbol{\nu}\} \cdot \nabla u(\phi) \right. \\ &\quad \left. + \partial_\nu u(\phi) \{\nabla \cdot \varphi - \boldsymbol{\nu} \cdot (\nabla \varphi^T \boldsymbol{\nu})\} \right] d\gamma \end{aligned}$$

を得る. これより, 本命題の前半の結果を得る. 後半の結果は命題 4.5 の証明と同様にして得られる. \square

境界積分の被積分関数が u と $\partial_\nu u$ の関数で与えられる場合には, 命題 4.5 と命題 4.6 の証明に微分の連鎖律を適用して, 次の結果を得る.

命題 4.7 (境界積分の形状微分) $\phi \in \mathcal{D}$ と $u \in C^1(\mathcal{D}; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ に対して, $h \in C^1(C^1(\mathcal{D}; H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})) \times C^1(\mathcal{D}; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})); H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}))$ が与えられたとき, 任意の $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ に対して,

$$f(\phi + \varphi, u(\phi + \varphi), \partial_\mu u(\phi + \varphi)) = \int_{\Gamma(\phi + \varphi)} h(u(\phi + \varphi), \partial_\mu u(\phi + \varphi)) d\zeta$$

とおく. このとき, f の形状微分は

$$\begin{aligned} f'(\phi, u(\phi), \partial_\nu u(\phi))[\varphi] &= \int_{\Gamma(\phi)} \left(h_u(u(\phi), \partial_\nu u(\phi)) [u'(\phi)[\varphi]] \right. \\ &\quad \left. + h_{\partial_\nu u}(u(\phi), \partial_\nu u(\phi)) \left[\partial_\nu u'(\phi)[\varphi] + w(\varphi, u) \right] \right. \\ &\quad \left. + h(u(\phi), \partial_\nu u(\phi)) (\nabla \cdot \varphi)_\tau \right) d\gamma \end{aligned}$$

となる. ここで, $w(\varphi, u)$ と $(\nabla \cdot \varphi)_\tau$ はそれぞれ (4.3) と (3.6) に従う. さらに, $\Gamma(\phi)$

が区分的に C^2 級ならば,

$$\begin{aligned} f'(\phi, u(\phi), \partial_\nu u(\phi))[\varphi] &= \int_{\Gamma(\phi)} \left(h_u(u(\phi), \partial_\nu u(\phi)) [u'(\phi)[\varphi]] \right. \\ &\quad \left. + h_{\partial_\nu u}(u(\phi), \partial_\nu u(\phi)) \left[\partial_\nu u'(\phi)[\varphi] + w(\varphi, u) \right] \right. \\ &\quad \left. + \kappa h(u(\phi), \partial_\nu u(\phi)) \nu \cdot \varphi - \nabla_\tau h(u(\phi), \partial_\nu u(\phi)) \cdot \varphi_\tau \right) d\gamma \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma(\phi) \cup \Theta(\phi)} h(u(\phi), \partial_\nu u(\phi)) \tau \cdot \varphi d\varsigma \end{aligned}$$

が成り立つ.

なお, 命題 4.5 から命題 4.7 において, 境界積分の形状微分に $(\nabla \cdot \varphi)_\tau$ あるいは (4.3) の $w(\varphi, u)$ が含まれているために, φ が $H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ の要素であることを仮定した. 本論文では, 任意の $\varphi \in X$ に対する Fréchet 微分を考えようとしている. $(\nabla \cdot \varphi)_\tau$ は $\Gamma(\phi)$ が区分的に C^2 級であれば不要となる. そこで, 今後, 評価関数を定義する際に, 評価関数の形状微分に $w(\varphi, u)$ が残らないように構成することが必要となる. 実際, 評価関数を (7.1) のように定義すれば, 望みの結果が得られることになる.

4.2 関数の形状偏微分を用いた公式

次に, 関数の形状偏微分 (定義 2.2) を用いて領域積分と境界積分の形状微分を求める公式を求めてみる.

まず, 命題 4.1 に対応して, 次の命題が得られる.

命題 4.8 (導関数なし領域積分の形状偏微分) $\phi \in \mathcal{D}$ と $u \in C^1(\mathcal{D}; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ が与えられたとき, 任意の $\varphi \in X$ に対して,

$$f(\phi + \varphi, u(\phi + \varphi)) = \int_{\Omega(\phi + \varphi)} u(\phi + \varphi) dz$$

とおく. このとき, f の形状微分は

$$(4.4) \quad f'(\phi, u(\phi))[\varphi] = \int_{\Omega(\phi)} u^*(\phi)[\varphi] dx + \int_{\partial\Omega(\phi)} u(\phi) \nu \cdot \varphi d\gamma$$

となる. ここで, $u^*(\phi)[\varphi]$ は定義 2.2 に従う.

証明 命題 4.1 の $u'(\phi)[\varphi]$ に (2.3) を代入し, Gauss の発散定理を適用すれば結果を得る. \square

また, 命題 4.3 に対応する導関数を被積分関数にした領域積分に対する関数の形状偏微分を用いた公式は, $\nabla u \in C^1(\mathcal{D}; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d))$ を命題 4.8 の u とみなすことで得られ

る。このとき、定義 2.2 より $(\nabla u)^*(\phi)[\varphi] = \nabla u^*(\phi)[\varphi]$ が成り立つことを考慮して、

$$(4.5) \quad f'(\phi, \nabla u(\phi))[\varphi] = \int_{\Omega(\phi)} \nabla u^*(\phi)[\varphi] dx + \int_{\partial\Omega(\phi)} (\nu \cdot \varphi) \nabla u(\phi) d\gamma$$

を得る。(4.5) は

$$(4.6) \quad \begin{aligned} f'(\phi, \nabla u(\phi))[\varphi] &= \int_{\Omega(\phi)} \left[\nabla u^*(\phi)[\varphi] + \left\{ \nabla^T (\nabla u(\phi) \varphi^T) \right\}^T \right] dx \\ &= \int_{\Omega(\phi)} \{ \nabla u^*(\phi)[\varphi] + \nabla \cdot \varphi \nabla u(\phi) + \Delta u(\phi) \varphi \} dx \end{aligned}$$

とかける。そこで、命題 4.3 の結果と比較すれば、

$$(4.7) \quad \nabla u'(\phi)[\varphi] = \nabla u^*(\phi)[\varphi] + \nabla \varphi^T \nabla u(\phi) + \Delta u(\phi) \varphi$$

が成り立つことになる。

被積分関数が u と ∇u の関数で与えられる場合には、命題 4.8 に微分の連鎖律を適用して、次の結果を得る。

命題 4.9 (領域積分の形状偏微分) $\phi \in \mathcal{D}$ と $u \in C^1(\mathcal{D}; H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ に対して、 $h \in C^1(C^1(\mathcal{D}; H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})) \times C^1(\mathcal{D}; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)); H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ が与えられたとき、任意の $\varphi \in X$ に対して、

$$f(\phi + \varphi, u(\phi + \varphi), u_z(\phi + \varphi)) = \int_{\Omega(\phi + \varphi)} h(u(\phi + \varphi), u_z(\phi + \varphi)) dz$$

とおく。このとき、 f の形状微分は

$$\begin{aligned} f'(\phi, u(\phi), \nabla u(\phi))[\varphi] &= \int_{\Omega(\phi)} \{ h_u(u(\phi), \nabla u(\phi)) [u^*(\phi)[\varphi]] \\ &\quad + h_{\nabla u}(u(\phi), \nabla u(\phi)) [\nabla u^*(\phi)[\varphi]] \} dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega(\phi)} h(u(\phi), \nabla u(\phi)) \nu \cdot \varphi d\gamma \end{aligned}$$

となる。

汎関数が境界積分で与えられた場合は、命題 4.5 に (2.3) を代入して、次の公式を得る。

命題 4.10 (導関数なし境界積分の形状偏微分) $\phi \in \mathcal{D}$ と $u \in C^1(\mathcal{D}; H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ が与えられたとき、任意の $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ に対して、

$$f(\phi + \varphi, u(\phi + \varphi)) = \int_{\Gamma(\phi + \varphi)} u(\phi + \varphi) d\zeta$$

とおく. このとき, f の形状微分は

$$(4.8) \quad f'(\phi, u(\phi))[\varphi] = \int_{\Gamma(\phi)} (u^*(\phi)[\varphi] + \nabla u(\phi) \cdot \varphi + u(\phi)(\nabla \cdot \varphi)_\tau) d\gamma$$

となる. ここで, $(\nabla \cdot \varphi)_\tau$ は (3.6) に従う. さらに, $\Gamma(\phi)$ が区分的に C^2 級ならば, 任意の $\varphi \in X$ に対して,

$$(4.9) \quad \begin{aligned} f'(\phi, u(\phi))[\varphi] &= \int_{\Gamma(\phi)} \{u^*(\phi)[\varphi] + (\partial_\nu u(\phi) + \kappa u(\phi))\nu \cdot \varphi\} d\gamma \\ &+ \int_{\partial\Gamma(\phi) \cup \Theta(\phi)} u(\phi) \tau \cdot \varphi d\zeta \end{aligned}$$

が成り立つ.

また, 境界積分の被積分関数が $\partial_\nu u$ の場合には, 次の結果を得る.

命題 4.11 (導関数あり境界積分の形状偏微分) $\phi \in \mathcal{D}$ と $u \in C^1(\mathcal{D}; H^3(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ が与えられたとき, 任意の $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ に対して,

$$f(\phi + \varphi, \partial_\mu u(\phi + \varphi)) = \int_{\Gamma(\phi + \varphi)} \partial_\mu u(\phi + \varphi) d\zeta$$

とおく. このとき, f の形状微分は

$$f'(\phi, \partial_\nu u(\phi))[\varphi] = \int_{\Gamma(\phi)} (\partial_\nu u^*(\phi)[\varphi] + \bar{w}(\varphi, u) + \partial_\nu u(\phi)(\nabla \cdot \varphi)_\tau) d\gamma$$

となる. ただし,

$$(4.10) \quad \bar{w}(\varphi, u) = - \left[\sum_{i \in \{1, \dots, d-1\}} \{\tau_i \cdot (\nabla \varphi^T \nu)\} \tau_i \right] \cdot \nabla u(\phi) + (\nu \cdot \varphi) \Delta u(\phi)$$

とおいた. また, $(\nabla \cdot \varphi)_\tau$ は (3.6) に従う. さらに, $\Gamma(\phi)$ が区分的に C^2 級ならば,

$$\begin{aligned} f'(\phi, \partial_\nu u(\phi))[\varphi] &= \int_{\Gamma(\phi)} \{ \partial_\nu u^*(\phi)[\varphi] + \bar{w}(\varphi, u) + \kappa \partial_\nu u(\phi) \nu \cdot \varphi \\ &- \nabla_\tau (\partial_\nu u(\phi)) \cdot \varphi_\tau \} d\gamma + \int_{\partial\Gamma(\phi) \cup \Theta(\phi)} \partial_\nu u(\phi) \tau \cdot \varphi d\zeta \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明 (4.7) から

$$(4.11) \quad \partial_\nu u'(\phi)[\varphi] = \partial_\nu u^*(\phi)[\varphi] + \left\{ (\nabla \varphi^T)^T \nu \right\} \cdot \nabla u(\phi) + \Delta u(\phi) \nu \cdot \varphi$$

を得る. この関係を命題 4.6 の結果に代入して本命題の結果を得る. \square

そこで、境界積分の被積分関数が u と $\partial_\nu u$ の関数で与えられる場合には、命題 4.10 と命題 4.11 に微分の連鎖律を適用して、次の結果を得る。

命題 4.12 (境界積分の形状偏微分) $\phi \in \mathcal{D}$ と $u \in C^1(\mathcal{D}; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ に対して、 $h \in C^1(C^1(\mathcal{D}; H^3(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})) \times C^1(\mathcal{D}; H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})); H^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}))$ が与えられたとき、任意の $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ に対して、

$$f(\phi + \varphi, u(\phi + \varphi), \partial_\nu u(\phi + \varphi)) = \int_{\Gamma(\phi + \varphi)} h(u(\phi + \varphi), \partial_\nu u(\phi + \varphi)) d\zeta$$

とおく。このとき、 f の形状微分は

$$\begin{aligned} f'(\phi, u(\phi), \partial_\nu u(\phi))[\varphi] &= \int_{\Gamma(\phi)} \left[h_u(u(\phi), \partial_\nu u(\phi)) [u^*(\phi)[\varphi] + \nabla u(\phi) \cdot \varphi] \right. \\ &\quad \left. + h_{\partial_\nu u}(u(\phi), \partial_\nu u(\phi)) \left[\partial_\nu u^*(\phi)[\varphi] + \bar{w}(\varphi, u) \right] \right. \\ &\quad \left. + h(u(\phi), \partial_\nu u(\phi)) (\nabla \cdot \varphi)_\tau \right] d\gamma \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\bar{w}(\varphi, u)$ と $(\nabla \cdot \varphi)_\tau$ はそれぞれ (4.10) と (3.6) に従う。さらに、 $\Gamma(\phi)$ が区分的に C^2 級ならば、

$$\begin{aligned} f'(\phi, u(\phi), \partial_\nu u(\phi))[\varphi] &= \int_{\Gamma(\phi)} \left\{ h_u(u(\phi), \partial_\nu u(\phi)) [u^*(\phi)[\varphi]] \right. \\ &\quad \left. + h_{\partial_\nu u}(u(\phi), \partial_\nu u(\phi)) \left[\partial_\nu u^*(\phi)[\varphi] + \bar{w}(\varphi, u) \right] \right. \\ &\quad \left. + (\partial_\nu h(u(\phi), \partial_\nu u(\phi)) + \kappa h(u(\phi), \partial_\nu u(\phi))) \nu \cdot \varphi \right\} d\gamma \\ &\quad + \int_{\partial\Gamma(\phi) \cup \Theta(\phi)} h(u(\phi), \partial_\nu u(\phi)) \tau \cdot \varphi d\zeta \end{aligned}$$

が成り立つ。

5. 関数の変動則

6 章において主問題 (偏微分方程式の境界値問題) を定義する。その際、変動する領域に対して、既知関数がどのように振る舞うのかを決めておく必要がある。ここでは、4 章までの結果を用いて、典型的な変動則を定義する。この章でも、ある $\phi \in \mathcal{D}$ を固定して、任意の領域変動 $\varphi \in X$ を考えることにする。

まず、関数値が領域上の点の移動と共に移動する場合を考える。そのときの関数の変動則を次のように定義する。図 6 に関数の定義域が \mathbb{R} の場合を示す。

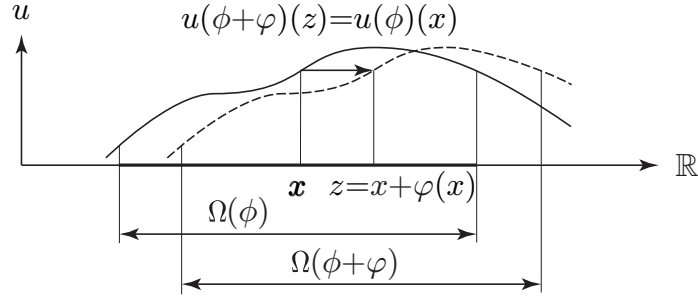


Fig. 6. Function fixed with material $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

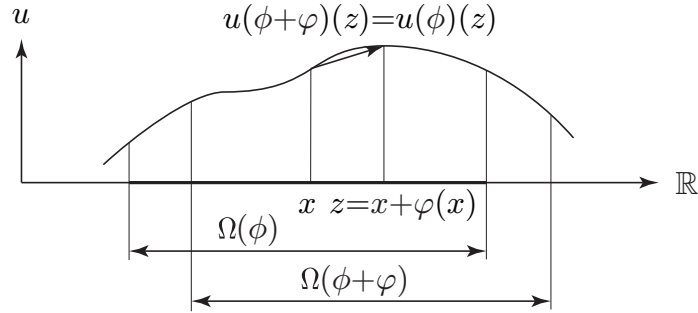


Fig. 7. Function fixed in space $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

定義 5.1 (物質固定) $\phi \in \mathcal{D}$ と $u \in C^1(\mathcal{D}; L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ が与えられたとき, 任意の $\varphi \in X$ に対して,

$$u'(\phi)[\varphi] = 0$$

を満たすとき, u は物質固定とよぶ.

また, 関数が領域変動に依存しない場合には次のように定義する (図 7).

定義 5.2 (空間固定) $\phi \in \mathcal{D}$ と $u \in C^1(\mathcal{D}; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ が与えられたとき, 任意の $\varphi \in X$ に対して,

$$u'(\phi)[\varphi] - \nabla u(\phi) \cdot \varphi = u^*(\phi)[\varphi] = 0$$

を満たすとき, u は空間固定とよぶ.

さらに, 領域上の点の移動と共にその点の関数値が領域の Jacobi 行列式 $\omega(\varphi)$ に反比例して変化する場合を考える. このとき, ほとんどすべての $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ において

$$\begin{aligned} u(\phi + \varphi)(\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x})) &= \frac{u(\phi)(\mathbf{x})}{\omega(\varphi)(\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}))} \\ (5.1) \quad &= u(\phi)(\mathbf{x}) (1 - \omega'(\varphi_0)[\varphi](\mathbf{x}) + o(\|\varphi(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^d})) \end{aligned}$$

が成り立つ (図 8). そこで, 命題 3.1 を用いて, このときの変動則を次のように定義する.

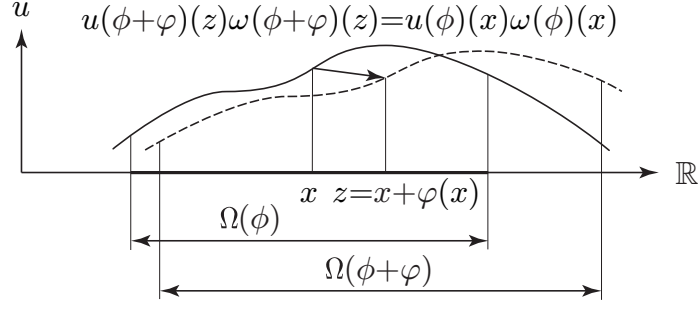


Fig. 8. Function varying with domain measure $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

定義 5.3 (領域測度共変) $\phi \in \mathcal{D}$ と $u \in C^1(\mathcal{D}; L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ が与えられたとき, 任意の $\varphi \in X$ に対して,

$$(5.2) \quad u'(\phi)[\varphi] + u(\phi) \nabla \cdot \varphi = 0$$

を満たすとき, u を領域測度共変とよぶ.

命題 4.1 に (5.2) を代入すれば $f'(\phi, u(\phi))[\varphi] = 0$ を得る. すなわち, 領域測度共変の関数とは, その関数の領域積分は領域が変動しても一定になることを意味している.

また, 境界上の点の移動と共にその点の関数値が境界の Jacobi 行列式 $\varpi(\varphi)$ に反比例した値をとる場合には,

$$(5.3) \quad \begin{aligned} u(\phi + \varphi)(\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x})) &= \frac{u(\phi)(\mathbf{x})}{\varpi(\varphi)(\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}))} \\ &= u(\phi)(\mathbf{x}) (1 - \varpi'(\varphi_0)[\varphi](\mathbf{x}) + o(\|\varphi(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^d})) \end{aligned}$$

が成り立つ. そこで, 命題 3.4 を用いて, このときの変動則を次のように定義する.

定義 5.4 (境界測度共変) $\phi \in \mathcal{D}$ と $u \in C^1(\mathcal{D}; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ が与えられたとき, 任意の $\varphi \in X$ に対して, ほとんどすべての $\mathbf{x} \in \partial\Omega(\phi)$ において

$$(5.4) \quad u'(\phi)[\varphi] + u(\phi) (\nabla \cdot \varphi)_\tau = 0$$

を満たすとき, u を境界測度共変とよぶ. ただし, $(\nabla \cdot \varphi)_\tau$ は (3.6) に従う.

命題 4.5 に (5.4) を代入すれば $f'(\phi, u(\phi))[\varphi] = 0$ を得る. この場合は, u の境界積分が変化しないことを意味する.

図 9 に, 境界力 $\mathbf{p} : \partial\Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$ が一定値 \mathbf{p}_0 で分布する場合に, 代表的な変動則に従って領域変動と共に変動する様子を示している. ここで, 静水圧の場合は, 図 9 (c) のように, 法線 $\boldsymbol{\nu}$ が物質固定で圧力 p が空間固定であると仮定している.

境界積分の被積分関数が静水圧のとき, 次のような公式を得る.

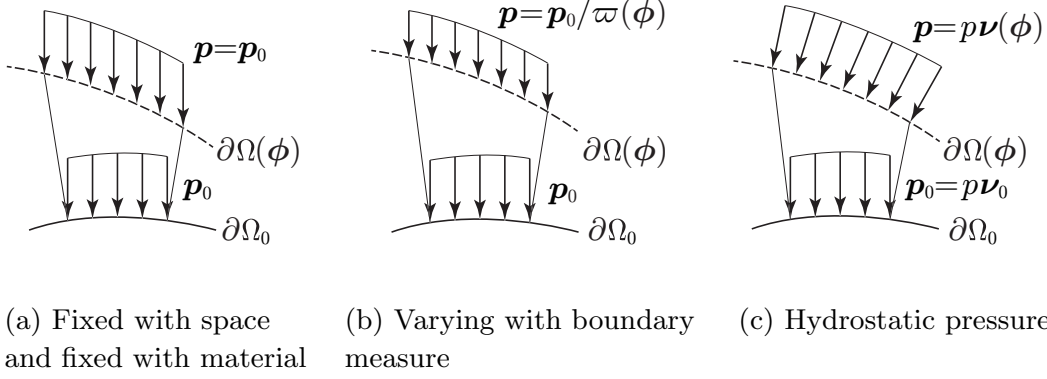


Fig. 9. Variation of uniform boundary force p_0

命題 5.1 (静水圧境界積分の形状微分) $p \in H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ を空間固定のある関数とする. $\phi \in \mathcal{D}$ が与えられたとき, 任意の $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ に対して,

$$f(\phi + \varphi, p) = \int_{\Gamma(\phi + \varphi)} p \nu(\phi + \varphi) d\zeta$$

とおく. このとき, f の形状微分は

$$f'(\phi, p)[\varphi] = \int_{\Gamma(\phi)} \{(\nabla p \cdot \varphi) \nu - p \nabla \varphi^T \nu + p(\nabla \cdot \varphi) \nu\} d\gamma$$

となる.

証明 f の積分領域 $\Gamma(\phi + \varphi)$ を $\Gamma(\phi)$ に変換すれば,

$$f(\phi + \varphi, p) = \int_{\Gamma(\phi)} p(\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x})) \nu(\phi + \varphi)(\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x})) \varpi(\varphi)(\mathbf{x}) d\gamma$$

が成り立つ. f の形状微分の定義より,

$$f'(\phi, p)[\varphi] = \int_{\Gamma(\phi)} \{(p'(\phi)[\varphi] \nu + p \nu'(\phi)[\varphi]) \varpi(\varphi_0) + p \nu \varpi'(\varphi_0)[\varphi]\} d\gamma$$

を得る. ここで, p は空間固定 (定義 5.2) を仮定していることから, $p'(\phi)[\varphi] = \nabla p \cdot \varphi$ が成り立ち, 命題 3.4 と命題 3.5 を用いれば結果を得る. \square

命題 5.1 より, 静水圧を含む境界積分を考える場合には, φ は $H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ の要素であることを仮定しなければならない点に注意する必要がある.

6. 主問題

関数や汎関数に対する形状微分の定義と公式が得られたので, それらを使って主問題となる偏微分方程式の境界値問題を定義する. 本論文では簡単のために Poisson 問題を考えることにする.

初期領域 Ω_0 のときの既知関数を $b_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $p_{N0} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $u_{D0} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ とかくことにする. それに対して, $\Omega(\phi)$ の拡張領域 \mathbb{R}^d 上の既知関数を $b(\phi) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $p_N(\phi) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $u_D(\phi) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ とかくことにする. これらは, ある指定された変動則により一意に定まると仮定する. このとき, 主問題を次のように定義する.

問題 6.1 (Poisson 問題) $\phi \in \mathcal{D}$ に対して $b(\phi)$, $p_N(\phi)$, $u_D(\phi)$ が与えられたとき,

$$\begin{aligned} -\Delta u(\phi) &= b(\phi) \quad \text{in } \Omega(\phi), \\ \partial_\nu u(\phi) &= p_N(\phi) \quad \text{on } \Gamma_p(\phi), \\ \partial_\nu u(\phi) &= 0 \quad \text{on } \Gamma_N(\phi) \setminus \bar{\Gamma}_p(\phi), \\ u(\phi) &= u_D(\phi) \quad \text{on } \Gamma_D(\phi) \end{aligned}$$

を満たす $u(\phi) : \Omega(\phi) \rightarrow \mathbb{R}$ を求めよ.

問題 6.1 において, $b(\phi)$, $p_N(\phi)$, $u_D(\phi)$ が適切に与えられていれば, 問題 6.1 に対する弱形式の解 $u(\phi)$ は $H^1(\Omega(\phi); \mathbb{R})$ に入る. ここで, Calderón の拡張定理 (命題 2.1) を用いれば, $u(\phi) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ とみなすことができる. そこで, 主問題の解 $u(\phi)$ に対して, $u(\phi) - u_D(\phi)$ を $\tilde{u}(\phi)$ とかくことにする. このとき, $\phi \in \mathcal{D}$ に対して, $\tilde{u}(\phi)$ が入る Hilbert 空間 (最適設計問題の状態空間) を

$$(6.1) \quad U(\phi) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \mid u = 0 \text{ on } \Gamma_D(\phi)\}$$

とおく. この $U(\phi)$ は, 主問題に対する Lagrange 関数の $u(\phi)$ の変動に対する Fréchet 偏微分を定義する際に用いられる.

さらに, 後に示す境界変動型の形状最適化問題に対する解法までを考えたときに, 主問題の解に対して要求される条件を満たす $\tilde{u}(\phi) = u(\phi) - u_D(\phi)$ の許容集合を, $q > d$ に対して,

$$(6.2) \quad \mathcal{S}(\phi) = \{u \in U(\phi) \cap W^{1,2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \mid u \in W^{2,2q}(\mathbb{R}^d \setminus V(\phi); \mathbb{R})\}$$

とおく. ただし, $V(\phi)$ は, $\Omega(\phi)$ が 2 次元領域のとき $\partial\Omega(\phi)$ の角点の近傍でかつ $\tilde{u}(\phi)$ が $W^{2,2q}$ 級に入らない特異点近傍, $\Omega(\phi)$ が 3 次元領域のとき頂点と辺の近傍でかつ $\tilde{u}(\phi)$ が $W^{2,2q}$ 級に入らない特異点近傍とする. $\tilde{u}(\phi) \in \mathcal{S}(\phi)$ のためには, $\Omega(\phi)$ が 2 次元領域のときには, 角点の開き角は 2π 未満, 混合境界条件の境界 $\partial\Gamma_D(\phi)$ の開き角は π 未満を満たす必要がある [7]. 既知関数に関しては, $\tilde{u}(\phi)$ が $\mathcal{S}(\phi)$ に入るために,

$$(6.3) \quad b(\phi) \in L^{2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}), \quad p_N(\phi) \in W^{2,2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}), \quad u_D(\phi) \in W^{2,2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$$

を仮定する.

これ以降, $b(\phi)$ や $u(\phi)$ および $U(\phi)$ や $\mathcal{S}(\phi)$ などを b や u および U や \mathcal{S} などのようにかくことにする.

問題 6.1 は、後に示す境界変動型の形状最適化問題 (問題 7.1) において等式制約として扱われる。後の議論では、等式制約は Lagrange 関数の停留条件におきかえられる。ここではそのための準備として、問題 6.1 の Lagrange 関数を

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_M(\phi, u, v) = & \int_{\Omega(\phi)} (-\nabla u \cdot \nabla v + bv) \, dx \\ & + \int_{\Gamma_p(\phi)} p_N v \, d\gamma + \int_{\Gamma_D(\phi)} \{(u - u_D) \partial_\nu v + v \partial_\nu u\} \, d\gamma \end{aligned}$$

と定義しておく。ここで、 v は Lagrange 乗数として導入された U の要素とする。このとき、(6.4) 右辺の $\Gamma_D(\phi)$ 上積分において $\partial_\nu v$ は定義されない。しかし、 $\tilde{u} \in \mathcal{S}$ のときに $u - u_D = 0$ が成り立つことにより $u - u_D$ を含む項は 0 になるとみなす。 u が問題 6.1 の解のとき、任意の $v \in U$ に対して、

$$\mathcal{L}_M(\phi, u, v) = 0$$

が成り立つ。この式は問題 6.1 の弱形式と同値である。

なお、4 章の表記法に従えば、 $\mathcal{L}_M(\phi, u, v)$ は $\mathcal{L}_M(\phi, u, \nabla u, \partial_\nu u, v, \nabla v, \partial_\nu v)$ とかくべきである。しかし、これ以降は $\mathcal{L}_M(\phi, u, v)$ のようにかくことにする。

7. 形状最適化問題

6 章において、設計変数 $\phi \in \mathcal{D}$ が与えられたときに状態変数 $\tilde{u} = u - u_D \in \mathcal{S}$ が主問題の解として決定されることをみてきた。それらの変数を用いて形状最適化問題を定義する。

本論文では、評価関数を $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ に対して

$$(7.1) \quad \begin{aligned} f_i(\phi, u) = & \int_{\Omega(\phi)} \zeta_i(\phi, u, \nabla u) \, dx + \int_{\Gamma_{\eta_i}(\phi)} \eta_{Ni}(\phi, u) \, d\gamma \\ & - \int_{\Gamma_D(\phi)} v_{Di}(\phi) \partial_\nu u \, d\gamma + c_i \end{aligned}$$

とおく。ここで、

$$(7.2) \quad \begin{aligned} \zeta_i & \in C^1(\mathcal{D} \times \mathcal{S} \times \mathcal{G}; L^q(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})), \quad \zeta_{iu} \in C^0(\mathcal{D} \times \mathcal{S} \times \mathcal{G}; L^{2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})), \\ \zeta_{i\nabla u} & \in C^0(\mathcal{D} \times \mathcal{S} \times \mathcal{G}; L^{2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)), \\ \eta_{Ni} & \in C^1(\mathcal{D} \times \mathcal{S}; W^{2,2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})), \\ v_{Di} & \in C^0(\mathcal{D}; W^{2,2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})) \end{aligned}$$

であると仮定する。ただし、

$$\mathcal{G} = \{ \nabla u \in L^{2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \mid \tilde{u} \in \mathcal{S} \}$$

とする。また、 $m + 1$ 個の評価関数の内、 f_0 を目的関数、 f_1, \dots, f_m を制約関数とよぶ。 c_1, \dots, c_m は定数で、すべての $i \in \{1, \dots, m\}$ に対して $f_i \leq 0$ を満たすある $(\phi, \tilde{u}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}$ が存在する (Slater 制約想定を満たす) ように定められているとする。

これらの評価関数を用いて、境界変動型の形状最適化問題を次のように定義する。

問題 7.1 (境界変動型の形状最適化問題) \mathcal{D} と \mathcal{S} をそれぞれ (2.1) と (6.2) のように定義する。 f_0, \dots, f_m を (7.1) で定義する。このとき、

$$\min_{\phi \in \mathcal{D}} \{ f_0(\phi, u) \mid f_1(\phi, u) \leq 0, \dots, f_m(\phi, u) \leq 0, \tilde{u} \in \mathcal{S}, \text{問題 6.1} \}$$

を満たす $\Omega(\phi)$ を求めよ。

今後、境界変動型の形状最適化問題 (問題 7.1) に対して評価関数の Fréchet 微分や KKT (Karush–Kuhn–Tucker) 条件についてみていくことにする。その際、いくつかの定義に基づく Lagrange 関数が使われる。ここでは、混乱をきたさないように、それらの関係をまとめておく。境界変動型の形状最適化問題 (問題 7.1) に対する Lagrange 関数を

$$(7.3) \quad \mathcal{L}(\phi, u, v_0, v_1, \dots, v_m, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{L}_0(\phi, u, v_0) + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i \mathcal{L}_i(\phi, u, v_i)$$

とかく。ただし、 $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}^T \in \mathbb{R}^m$ は $f_1(\phi, u) \leq 0, \dots, f_m(\phi, u) \leq 0$ に対する Lagrange 乗数である。さらに、ある $i \in \{1, \dots, m\}$ の評価関数 f_i が u の汎関数である場合には、主問題 (問題 6.1) が等式制約になることから、

$$(7.4) \quad \mathcal{L}_i(\phi, u, v_i) = f_i(\phi, u) + \mathcal{L}_M(\phi, u, v_i)$$

を $f_i(\phi, u)$ の Lagrange 関数という。ここで、 \mathcal{L}_M は (6.4) で定義された主問題の Lagrange 関数である。また、 v_i は f_i のために用意した主問題に対する Lagrange 乗数で、 $\tilde{v}_i = v_i - v_{D_i}$ が U の要素であると仮定する。さらに、後に示す境界変動型の形状最適化問題に対する解法までを考えたときに、 \tilde{v}_i は \mathcal{S} の要素であることが必要となる。 u と同様、 \tilde{v}_i の変動 v'_i を考えるときには $v'_i \in U$ を仮定する。

8. 評価関数の形状微分

本論文では、境界変動型の形状最適化問題 (問題 7.1) を勾配法で解くことを考える。そのためには、評価関数の形状微分が必要となる。ここでは、評価関数 f_i の形状微分を求める方法について考える。はじめに、随伴変数法に関する基本的な結果を得てから、Lagrange 乗数法についてみていくことにする。その後で、(7.1) の f_i に対する具体的な結果を示す。なお、随伴変数とは主問題に対する Lagrange 乗数 v_i のことである。

8.1 随伴変数法

まず，随伴変数法の根拠を示す．主問題 (問題 6.1) を抽象化し，その強形式を

$$(8.1) \quad h(\phi, \tilde{u}) = \tilde{b}(\phi) - \tau(\phi)\tilde{u} = 0_{U'}$$

とかくことにする．ここで， $\tau(\phi) : U \rightarrow U'$ は Riesz の表現定理によって与えられる同型写像を表し， $\tilde{b}(\phi) \in U'$ は問題 6.1 の $b(\phi) - \tau(\phi)u_D$ と $p_N(\phi)$ を抽象化した既知項を表すことにする．このとき，ある $i \in \{1, \dots, m\}$ の評価関数 f_i に対して，次の問題を考えることにする．

問題 8.1 (等式制約付き抽象的最適設計問題) $(\phi, \tilde{u}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}$ に対して， $f_i : \mathcal{D} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき，

$$\min_{(\phi, \tilde{u}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}} \{f_i(\phi, \tilde{u}) \mid h(\phi, \tilde{u}) = 0_{U'}\}$$

を満たす (ϕ, \tilde{u}) を求めよ．

本節では， f_i と h の形状微分を

$$(8.2) \quad f'_i(\phi, \tilde{u})[\varphi, \tilde{v}_i] = f_{i\phi}(\phi, \tilde{u})[\varphi] + f_{i\tilde{u}}(\phi, \tilde{u})[\tilde{v}_i] = \langle \mathbf{g}_{f_i}, \varphi \rangle + f_{i\tilde{u}}(\phi, \tilde{u})[\tilde{v}_i],$$

$$(8.3) \quad h'(\phi, \tilde{u})[\varphi, \tilde{v}_i] = h_\phi(\phi, \tilde{u})[\varphi] + h_{\tilde{u}}(\phi, \tilde{u})[\tilde{v}_i] = \langle \mathbf{g}_h, \varphi \rangle - \tau(\phi)\tilde{v}_i$$

とかくことにする．ここで， $f_{i\phi}(\phi, \tilde{u})[\varphi]$ などの Fréchet 偏微分の具体的な表示は 8.3 節と 8.4 節の中で示される．この表示を用いて，この問題 8.1 に対して次の結果を得る．

定理 8.1 (Lagrange 関数を用いた極小点 1 次の必要条件) 問題 8.1 の f_i と h をそれぞれ $C^1(\mathcal{D} \times \mathcal{S}; \mathbb{R})$ および $C^1(\mathcal{D} \times \mathcal{S}; U')$ の要素とする． f_i と h の形状微分をそれぞれ (8.2) と (8.3) とおく．このとき， (ϕ, \tilde{u}) が問題 8.1 の極小点ならば，任意の $(\varphi, \tilde{v}_i) \in X \times U$ に対して

$$(8.4) \quad \langle \mathbf{g}_{f_i} + \langle \mathbf{g}_h, \tilde{v}_i \rangle, \varphi \rangle + \langle f_{i\tilde{u}}(\phi, \tilde{u}) - \tau(\phi)\tilde{v}_i, \tilde{v}_i \rangle = 0,$$

$$(8.5) \quad \langle \tilde{b}(\phi) - \tau(\phi)\tilde{u}, \tilde{v}_i \rangle = 0$$

を満たす $\tilde{v}_i \in U$ が存在する．

証明 $f_i \in C^1(\mathcal{D} \times \mathcal{S}; \mathbb{R})$ と $h \in C^1(\mathcal{D} \times \mathcal{S}; U')$ の仮定，および $h(\phi, \tilde{u}) = 0_{U'}$ を満たす解 u が一意に決まることから， $h : \mathcal{D} \times \mathcal{S} \rightarrow U'$ は，ある $(\phi, \tilde{u}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}$ の近傍 $B_X \times B_U \subset X \times U$ において，陰関数定理の仮定

1. $h(\phi, \tilde{u}) = 0_{U'}$,

2. $h \in C^0(B_X \times B_U; U')$,
3. 任意の $\mathbf{y} = (\boldsymbol{\varphi}, \tilde{v}_i) \in B_X \times B_U$ に対して $h(\boldsymbol{\phi}, \cdot) \in C^1(B_U; U')$ で, かつ $h_{\tilde{u}}(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u}) = \tau : U \rightarrow U'$ は $(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u})$ で連続,
4. $(h_{\tilde{u}}(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u}))^{-1} = \tau^{-1} : U' \rightarrow U$ は有界線形

を満たす. そこで, 陰関数定理より, ある近傍 $U_X \times U_U \subset B_X \times B_U$ と連続な写像 $v : U_X \rightarrow U_U$ が存在して, $h(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u}) = 0_{U'}$ は

$$\tilde{u} = v(\boldsymbol{\phi})$$

とかけ. したがって, $\mathbf{y}(\boldsymbol{\phi}) = (\boldsymbol{\phi}, v(\boldsymbol{\phi})) \in C^1(\mathcal{D}; X \times U)$ を定義することができる.

そこで, $\tilde{f}_i(\boldsymbol{\phi}) = f_i(\boldsymbol{\phi}, v(\boldsymbol{\phi})) = f_i(\mathbf{y}(\boldsymbol{\phi}))$ とかくことにする. $f_i \in C^1(\mathcal{D} \times \mathcal{S}; \mathbb{R})$ を仮定したので, $\boldsymbol{\phi}$ が極小点のとき, 任意の $\boldsymbol{\varphi} \in X$ に対して,

$$(8.6) \quad \tilde{f}'_i(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}] = \mathbf{y}'^T(\boldsymbol{\phi}) \circ \mathbf{g}(\boldsymbol{\phi}, v(\boldsymbol{\phi}))[\boldsymbol{\varphi}] = 0$$

が成り立つ. ただし,

$$\begin{aligned} f'_i(\boldsymbol{\phi}, v(\boldsymbol{\phi})) &= \mathbf{g}(\boldsymbol{\phi}, v(\boldsymbol{\phi})) \in \mathcal{L}(X; X' \times U') = \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X \times U; \mathbb{R})), \\ \mathbf{y}'(\boldsymbol{\phi}) &\in \mathcal{L}(X; X \times U), \\ \mathbf{y}'^T(\boldsymbol{\phi}) &\in \mathcal{L}(X' \times U'; X') \end{aligned}$$

である. なお, $\mathcal{L}(X; U)$ は有界線形作用素 $X \rightarrow U$ を表す. また, \circ は合成作用素を表す. 以下で, (8.6) の関係をかきかえる.

まず, $(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u})$ の許容集合を

$$S = \{(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \mid h(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u}) = 0_{U'}\}$$

とかくことにする. ある $(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u}) \in S$ を固定して, \mathbf{y} における許容方向集合 (接面) を

$$T_S(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u}) = \{(\boldsymbol{\varphi}, \tilde{v}_i) \in X \times U \mid h'(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u})[\boldsymbol{\varphi}, \tilde{v}_i] = 0_U\} = \text{Ker } h'(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u})$$

とかく. ここで, $\text{Ker } h'(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u})$ は, $h'(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u}) \in \mathcal{L}(X \times U; U)$ の零空間 (核空間) を表す. それに対して, $T_S(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u})$ の双対集合 (双対面) を

$$\begin{aligned} T'_S(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u}) &= \{(\boldsymbol{\psi}, w) \in X' \times U' \mid \\ &\langle (\boldsymbol{\varphi}, \tilde{v}_i), (\boldsymbol{\psi}, w) \rangle = 0 \text{ for all } (\boldsymbol{\varphi}, \tilde{v}_i) \in T_S(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u})\} = (\text{Ker } h'(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u}))^\perp \end{aligned}$$

とかく. ここで, $(\cdot)^\perp$ は直交補空間を表す.

また, $T_S(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u})$ および $T'_S(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u})$ と $\mathbf{y}'(\boldsymbol{\phi})$ の関係は, 次のように得られる. $h(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u}) = 0_{U'}$ の両辺を任意の $\boldsymbol{\varphi} \in X$ に対する Fréchet 微分をとると,

$$h'(\boldsymbol{\phi}, \tilde{u}) \circ \mathbf{y}'(\boldsymbol{\phi})[\boldsymbol{\varphi}] = 0_U$$

となる．この関係は $\mathbf{y}'(\phi)$ の値空間 (像空間) $\text{Im } \mathbf{y}'(\phi)$ が $h'(\phi, \tilde{u})$ の零空間 $\text{Ker } h'(\phi, \tilde{u})$ になっていることを表している．すなわち，

$$(8.7) \quad T_S(\phi, \tilde{u}) = \text{Im } \mathbf{y}'(\phi)$$

が成り立つ．

以上の関係を用いて，(8.6) をかきかえる． ϕ が極小点のとき， $\mathbf{g}(\phi, v(\phi))$ は任意の $(\varphi, \tilde{v}_i) \in T_S(\phi, \tilde{u})$ に対して直交していなければならないので，

$$(8.8) \quad \mathbf{g}(\phi, v(\phi)) \in T'_S(\phi, \tilde{u})$$

となる．ここで，(8.7) と零空間と像空間の直交補空間に関する定理より，

$$T'_S(\phi, \tilde{u}) = (T_S(\phi, \tilde{u}))^\perp = (\text{Ker } h'(\phi, \tilde{u}))^\perp = \text{Im } h'^T(\phi, \tilde{u})$$

が成り立つ．ここで， $h'^T(\phi, \tilde{u}) \in \mathcal{L}(U'; X' \times U')$ である．したがって，(8.8) は

$$(f_{i\phi}(\phi, u), f_{iu}(\phi, u)) \in \{(\langle h_\phi(\phi, \tilde{u}), \tilde{v}_i \rangle, \langle h_{\tilde{u}}(\phi, \tilde{u}), \tilde{v}_i \rangle) \in X' \times U' \mid \tilde{v}_i \in U\}$$

とかける．この関係は (8.4) と同値である．また，(8.5) は u が (8.1) の解ならば成り立つ． \square

定理 8.1 に基づいて，随伴変数法を次のように定義する． $\tilde{v}_i = v_i - v_{D_i} \in U$ を f_i に対する随伴変数とよび，(8.4) の左辺第 2 項が 0 になるように決定する．すなわち，次の問題の解とする．

問題 8.2 (f_i に対する随伴問題) $\phi \in \mathcal{D}$ とそのときの (8.1) の解 $\tilde{u} \in \mathcal{S}$ と $f_{iu}(\phi, u) \in U'$ が与えられたとき，

$$(8.9) \quad f_{iu}(\phi, u) - \tau(\phi) \tilde{v}_i = 0_{U'}$$

を満たす関数 $\tilde{v}_i \in U$ を求めよ．ただし， $\tau(\phi)$ は (8.1) と同一である．

問題 8.2 の解 \tilde{v}_i を用いれば，(8.4) は

$$(8.10) \quad \langle \mathbf{g}_{f_i} + \langle \mathbf{g}_h, \tilde{v}_i \rangle, \varphi \rangle = \langle \mathbf{g}_i, \varphi \rangle = 0$$

とかくことができる．そこで， \mathbf{g}_i は $\mathbf{g}_{f_i} + \langle \mathbf{g}_h, \tilde{v}_i \rangle$ によって計算できることになる．

このときの \mathbf{g}_i は， $\varphi \in X$ により領域が変動しても， \tilde{u} は抽象化された主問題 (8.1) の解でありつづけたときの f_i の $\varphi \in X$ に対する Fréchet 微分になる．そこで，定理 8.1 の証明の中で定義した $v(\phi)$ を用いれば， $\tilde{f}'_i(\phi) = f'_i(\phi, v(\phi))$ に対して，

$$(8.11) \quad \tilde{f}'_i(\phi) [\varphi] = \langle \mathbf{g}_i, \varphi \rangle$$

とかけることになる．

8.2 Lagrange 乗数法

(8.11) の g_i の評価式は、次に示す Lagrange 乗数法によっても同一の結果を得る. 8.3 節と 8.4 節では、手続きが明快であるとの理由で、この方法を用いることにする.

問題 8.1 の Lagrange 関数を

$$(8.12) \quad \mathcal{L}_i(\phi, u, v_i) = f_i(\phi, u) + \langle h(\phi, \tilde{u}), \tilde{v}_i \rangle = f_i(\phi, u) + \mathcal{L}_M(\phi, u, v_i)$$

とおく. ただし, $\mathcal{L}_M(\phi, u, v_i)$ は (6.4) で定義した主問題 (問題 6.1) の Lagrange 関数である. v_i は f_i のために用意した主問題に対する Lagrange 乗数で, 定理 8.1 と同様, $\tilde{v}_i = v_i - v_{Di}$ は U の要素であると仮定する. さらに, 境界変動型の形状最適化問題 (問題 7.1) の解法までを考えたときには, \tilde{v}_i は \mathcal{S} の要素であることが必要とされる.

ここで, $\mathcal{L}_i(\phi, u, v_i)$ の任意の $(\varphi, u', v'_i) \in X \times U \times U$ に対する Fréchet 微分を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_i(\phi, u, v_i)[\varphi, u', v'_i] &= \mathcal{L}_{i\phi}(\phi, u, v_i)[\varphi] + \mathcal{L}_{iu}(\phi, u, v_i)[u'] \\ &\quad + \mathcal{L}_{iv_i}(\phi, u, v_i)[v'_i] \end{aligned}$$

とかく. このとき, 問題 8.1 に対して次の結果を得る. ここで, u が主問題 (問題 6.1) の解ならば, 任意の $v'_i \in U$ に対して

$$(8.13) \quad \mathcal{L}_{iv_i}(\phi, u, v_i)[v'_i] = \mathcal{L}_M(\phi, u, v'_i) = 0$$

が成り立つ. また, 任意の $u' \in U$ に対して

$$(8.14) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{iu}(\phi, u, v_i)[u'] &= f_{iu}(\phi, u)[u'] + \mathcal{L}_{Mu}(\phi, u, v_i)[u'] \\ &= \langle f_{iu}(\phi, u) - \tau(\phi)\tilde{v}_i, u' \rangle = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. (8.14) は, 随伴問題 (問題 8.2) の弱形式と一致する. そこで, 随伴問題の弱解を \tilde{v}_i とおけば (8.14) は満たされる.

一方, 任意の $\varphi \in X$ に対して,

$$(8.15) \quad \mathcal{L}_{i\phi}(\phi, u, v_i)[\varphi] = \langle g_{f_i} + \langle g_h, \tilde{v}_i \rangle, \varphi \rangle = \langle g_i, \varphi \rangle$$

が成り立つ. ここで, g_i は (8.10) と一致する. u と v_i も一致したことから, 随伴変数法によって得られた評価式と同一の結果が得られたことになる.

以下では, Lagrange 乗数法を使って, 境界変動型の形状最適化問題における評価関数の形状微分を求める式を導く. その際, 4 章で示した 2 種類の公式に分けてみていくことにする.

8.3 関数の形状微分公式を用いた評価法

最初に、関数の形状微分公式 (4.1 節) を使って \mathcal{L}_i の形状微分を求め、その停留条件を使って f_i の形状微分を求めてみる。

ここでは、結果がより簡潔になるという理由で、 $b(\phi)$, $p_N(\phi)$, $u_D(\phi)$, $\zeta_i(\phi, \cdot, \cdot)$ および $\eta_{Ni}(\phi, \cdot)$ は物質固定であると仮定する。なお、 $b(\phi)$ を b とかくときには、 $\zeta_i(\phi, u, \nabla u)$ も $\zeta_i(u, \nabla u)$ などとかくことにする。

このとき、 $\mathcal{L}_i(\phi, u(\phi), v_i(\phi))$ の形状微分は

$$(8.16) \quad \begin{aligned} & \mathcal{L}'_i(\phi, u, v_i)[\varphi] \\ &= \mathcal{L}_{i\phi}(\phi, u, v_i)[\varphi] + \mathcal{L}_{iu}(\phi, u, v_i)[u'] + \mathcal{L}_{iv_i}(\phi, u, v_i)[v'_i] \end{aligned}$$

とかける。ここで、 u' と v'_i はそれぞれ u と v_i の形状微分 $u'(\phi)[\varphi]$ と $v'_i(\phi)[\varphi]$ を表す。以下で各項について考察する。

(8.16) の右辺第 3 項は、

$$(8.17) \quad \mathcal{L}_{iv_i}(\phi, u, v_i)[v'_i] = \mathcal{L}_{Mv_i}(\phi, u, v_i)[v'_i] = \mathcal{L}_M(\phi, u, v'_i)$$

となる。(8.17) は主問題 (問題 6.1) の Lagrange 関数になっている。そこで、 u が主問題 (問題 6.1) の弱解ならば、(8.16) の右辺第 3 項は 0 となる。

また、(8.16) の右辺第 2 項は、

$$(8.18) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{iu}(\phi, u, v_i)[u'] &= \int_{\Omega(\phi)} (\zeta_{iu}(u, \nabla u)[u'] + \zeta_{i\nabla u}(u, \nabla u)[\nabla u']) dx \\ &+ \int_{\Gamma_{\eta_i}(\phi)} \eta_{Niu}(u)[u'] d\gamma - \int_{\Gamma_D(\phi)} v_{Di} \partial_\nu u' d\gamma \\ &+ \mathcal{L}_{Mu}(\phi, u, v_i)[u'] \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\mathcal{L}_{Mu}(\phi, u, v_i)[u'] = - \int_{\Omega(\phi)} \nabla u' \cdot \nabla v_i dx + \int_{\Gamma_D(\phi)} \{u' \partial_\nu v_i + v_i \partial_\nu u'\} d\gamma$$

である。ここで、 v_i が、任意の $u' \in U$ に対して、(8.18) が 0 となるように決定できれば、(8.16) の右辺第 2 項も 0 となる。この問題の強形式は次のように得られる。

$v_i \in H^2(\Omega(\phi); \mathbb{R})$ を仮定すれば,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega(\phi)} (\zeta_{i\nabla u}(u, \nabla u) [\nabla u'] - \nabla u' \cdot \nabla v_i) dx \\
&= \int_{\Omega(\phi)} (\zeta_{i\nabla u}(u, \nabla u) - \nabla v_i) \cdot \nabla u' dx \\
&= \int_{\partial\Omega(\phi)} u' (\zeta_{i\nabla u}(u, \nabla u) - \nabla v_i) \cdot \boldsymbol{\nu} d\gamma \\
&\quad - \int_{\Omega(\phi)} u' \nabla \cdot (\zeta_{i\nabla u}(u, \nabla u) - \nabla v_i) dx
\end{aligned}$$

とかける. そこで, v_i が次の随伴問題の弱解であるときに (8.16) の右辺第 2 項も 0 になることになる.

問題 8.3 (f_i に対する随伴問題) $\phi \in \mathcal{D}$ に対して問題 6.1 の解 u が与えられたとき,

$$\begin{aligned}
-\Delta v_i(\phi) &= \zeta_{iu}(\phi, u, \nabla u) + \nabla \cdot \zeta_{i\nabla u}(\phi, u, \nabla u) \quad \text{in } \Omega(\phi), \\
\partial_\nu v_i(\phi) &= \eta_{Ni}(\phi, u) + \zeta_{i\nabla u}(\phi, u, \nabla u) \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{on } \Gamma_{\eta_i}(\phi), \\
\partial_\nu v_i(\phi) &= \zeta_{i\nabla u}(\phi, u, \nabla u) \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{on } \Gamma_N(\phi) \setminus \bar{\Gamma}_{\eta_i}(\phi), \\
v_i(\phi) &= v_{Di}(\phi) \quad \text{on } \Gamma_D(\phi)
\end{aligned}$$

を満たす $v_i(\phi) : \Omega(\phi) \rightarrow \mathbb{R}$ を求めよ.

さらに, (8.16) の右辺第 1 項は,

$$(8.19) \quad \mathcal{L}_{i\phi}(\phi, u, v_i)[\varphi] = f_{i\phi}(\phi, u)[\varphi] + \mathcal{L}_{M\phi}(\phi, u, v_i)[\varphi]$$

となる. ここで, (8.19) の右辺第 1 項は, 命題 4.4 および命題 4.7 より,

$$\begin{aligned}
f_{i\phi}(\phi, u)[\varphi] &= \int_{\Omega(\phi)} (\zeta_i(u, \nabla u) \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} - \zeta_{i\nabla u}(u, \nabla u) [\nabla \boldsymbol{\varphi}^T \nabla u]) dx \\
&+ \int_{\Gamma_{\eta_i}(\phi)} (\kappa \eta_{Ni}(u) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \nabla_\tau \eta_{Ni}(u) \cdot \boldsymbol{\varphi}_\tau) d\gamma \\
&+ \int_{\partial\Gamma_{\eta_i}(\phi) \cup \Theta(\phi)} \eta_{Ni}(u) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} d\varsigma - \int_{\Gamma_D(\phi)} v_{Di}(w(\boldsymbol{\varphi}, u) + \partial_\nu u (\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})_\tau) d\gamma
\end{aligned}$$

となる. ここで, $w(\boldsymbol{\varphi}, u)$ と $(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})_\tau$ はそれぞれ (4.3) と (3.6) に従う. また, (8.19)

の右辺第 2 項は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{M\phi}(\phi, u, v_i)[\varphi] &= \int_{\Omega(\phi)} \left\{ \nabla u \cdot (\nabla \varphi^T \nabla v_i) + \nabla v_i \cdot (\nabla \varphi^T \nabla u) \right. \\
&\quad \left. + (-\nabla u \cdot \nabla v_i + b v_i) \nabla \cdot \varphi \right\} dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_p(\phi)} \{ \kappa p_N v_i \boldsymbol{\nu} \cdot \varphi - \nabla_\tau (p_N v_i) \cdot \boldsymbol{\varphi}_\tau \} d\gamma + \int_{\partial\Gamma_p(\phi) \cup \Theta(\phi)} p_N v_i \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} d\varsigma \\
&\quad + \int_{\Gamma_D(\phi)} \left[\{ (u - u_D) w(\varphi, v_i) + v_i w(\varphi, u) \} \right. \\
&\quad \left. + \{ (u - u_D) \partial_\nu v_i + v_i \partial_\nu u \} (\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})_\tau \right] d\gamma
\end{aligned}$$

となる．ここで，問題 6.1 と問題 8.3 の Dirichlet 条件が成り立つことを考慮すれば， $\mathcal{L}_i\phi$ における $\Gamma_D(\phi)$ 上の積分は 0 となる．また， $\Gamma_N(\phi)$ 上の積分は，被積分関数が非零の $\Gamma_p(\phi)$ と $\Gamma_{\eta_i}(\phi)$ 上の積分となる．この積分を求めるために， $\Gamma_p(\phi)$ と $\Gamma_{\eta_i}(\phi)$ が区分的に C^2 級であること (\mathcal{D} の定義において仮定された) を用いた．

以上の結果を踏まえて， u と v_i はそれぞれ問題 6.1 と問題 8.3 の弱解であると仮定すれば，(8.11) の表記を用いて

$$\begin{aligned}
\tilde{f}'_i(\phi)[\varphi] &= \mathcal{L}_i\phi(\phi, u, v_i)[\varphi] = \langle \mathbf{g}_i, \boldsymbol{\varphi} \rangle \\
&= \int_{\Omega(\phi)} (\mathbf{G}_{\Omega i} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}^T + g_{\Omega i} \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) dx + \int_{\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta_i}(\phi)} \mathbf{g}_{N i} \cdot \boldsymbol{\varphi} d\gamma \\
(8.20) \quad &\quad + \int_{\partial(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta_i}(\phi)) \cup \Theta(\phi)} \mathbf{g}_{\partial N i} \cdot \boldsymbol{\varphi} d\varsigma
\end{aligned}$$

とかくことができる．ここで，

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{\Omega i} &= \nabla u (\nabla v_i)^T + \nabla v_i (\nabla u)^T - \zeta_i \nabla u (u, \nabla u) (\nabla u)^T \\
g_{\Omega i} &= \zeta_i (u, \nabla u) - \nabla u \cdot \nabla v_i + b v_i \\
\mathbf{g}_{N i} &= \kappa (p_N v_i + \eta_{N i}(u)) \boldsymbol{\nu} - \sum_{i \in \{1, \dots, d-1\}} \{ \boldsymbol{\tau}_i \cdot \nabla (p_N v_i + \eta_{N i}(u)) \} \boldsymbol{\tau}_i \\
\mathbf{g}_{\partial N i} &= (p_N v_i + \eta_{N i}(u)) \boldsymbol{\tau}
\end{aligned}$$

となる．なお，本論文では $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ と $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ のスカラー積 $\sum_{(i,j) \in \{1, \dots, d\}^2} a_{ij} b_{ij}$ を $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ とかく．また，(8.20) を導く際に， $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ ， $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ および $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ に対する恒等式 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{B}\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\mathbf{c}^T) \cdot \mathbf{B}$ を用いた．

以上の結果に基づいて，(8.20) の \mathbf{g}_i について次の結果を得る．

定理 8.2 (f_i の形状微分 \mathbf{g}_i) $(\phi, u) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}$ に対して， $b(\phi)$ ， $p_N(\phi)$ ， $u_D(\phi)$ ， $\zeta_i(\phi, u, \nabla u)$ ， $\eta_{N i}(\phi, u)$ および $v_{D i}(\phi)$ は物質固定で，(6.3) および (7.2) を満たす関数とする． u と v_i はそれぞれ主問題 (問題 6.1) と随伴問題 (問題 8.3) の弱解で，

(6.2) の \mathcal{S} に入るとする. このとき, f_i の形状微分は (8.20) の $\mathbf{g}_i \in X'$ となる. ここで, $\mathbf{G}_{\Omega i} \in L^q(\Omega(\phi); \mathbb{R}^{d \times d})$, $g_{\Omega i} \in L^q(\Omega(\phi); \mathbb{R})$, $\mathbf{g}_{N i} \in L^\infty(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi); \mathbb{R}^d)$, $\mathbf{g}_{\partial N i} \in L^\infty(\partial(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi)) \cup \Theta(\phi); \mathbb{R}^d)$ となる.

証明 f_i の形状微分が (8.20) の \mathbf{g}_i となることは上でみてきたとおりである. \mathbf{g}_i の正則性に関しては次のことが成り立つ. $\mathbf{G}_{\Omega i}$ の第 1 項に対して, Hölder の不等式より,

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \nabla u (\nabla v_i)^T \right\} \cdot \nabla \varphi^T \right\|_{L^1(\Omega(\phi); \mathbb{R})} \\ & \leq \left\| \nabla u (\nabla v_i)^T \right\|_{L^q(\Omega(\phi); \mathbb{R}^{d \times d})} \left\| \nabla \varphi^T \right\|_{L^2(\Omega(\phi); \mathbb{R}^{d \times d})} \\ & \leq \left\| \nabla u \right\|_{L^{2q}(\Omega(\phi); \mathbb{R}^d)} \left\| \nabla v_i \right\|_{L^{2q}(\Omega(\phi); \mathbb{R}^d)} \left\| \nabla \varphi^T \right\|_{L^2(\Omega(\phi); \mathbb{R}^{d \times d})} \\ & \leq \|u\|_{W^{1,2q}(\Omega(\phi); \mathbb{R})} \|v_i\|_{W^{1,2q}(\Omega(\phi); \mathbb{R})} \|\varphi\|_{H^1(\Omega(\phi); \mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, $u \in W^{1,2q}(\Omega(\phi); \mathbb{R})$ および $v_i \in W^{1,2q}(\Omega(\phi); \mathbb{R})$ を仮定しているので, $\nabla u (\nabla v_i)^T$ は $L^q(\Omega(\phi); \mathbb{R}^{d \times d})$ に入る. $\mathbf{G}_{\Omega i}$ の他の項についても同様の結果が得られる. そこで, $\mathbf{G}_{\Omega i}$ は $L^q(\Omega(\phi); \mathbb{R}^{d \times d})$ に入る. $g_{\Omega i}$ についても同様の結果が得られる.

また, $\mathbf{g}_{N i}$ および $\mathbf{g}_{\partial N i}$ の正則性は ν , τ および κ の正則性によってきまる. $\mathbf{g}_{N i}$ の第 1 項に対して, Hölder の不等式より,

$$\begin{aligned} & \left\| \kappa p_N v_i \nu \cdot \varphi \right\|_{L^1(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi); \mathbb{R})} \\ & \leq \left\| \kappa p_N v_i \nu \right\|_{L^2(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi); \mathbb{R}^d)} \|\varphi\|_{L^2(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi); \mathbb{R}^d)} \\ & \leq \left\| \kappa \right\|_{L^\infty(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi); \mathbb{R})} \left\| p_N \right\|_{L^{2q}(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi); \mathbb{R})} \\ & \quad \times \left\| v_i \right\|_{L^{2q}(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi); \mathbb{R})} \left\| \nu \right\|_{L^\infty(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi); \mathbb{R}^d)} \\ & \quad \times \|\varphi\|_{L^2(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi); \mathbb{R}^d)} \\ & \leq \|\gamma\|^3 \left\| p_N \right\|_{W^{1,2q}(\Omega(\phi); \mathbb{R})} \|v_i\|_{W^{1,2q}(\Omega(\phi); \mathbb{R})} \\ & \quad \times \left\| \kappa \right\|_{L^\infty(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi); \mathbb{R})} \left\| \nu \right\|_{L^\infty(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi); \mathbb{R}^d)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega(\phi); \mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $\gamma : W^{1,2q}(\Omega(\phi); \mathbb{R}) \rightarrow L^{2q}(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi); \mathbb{R})$ はトレース作用素であり, トレース定理 [22] により γ の作用素ノルム $\|\gamma\|$ は有界である. また, 3.2 節で定義したように, ν は $L^\infty(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi); \mathbb{R}^d)$ に入り, κ は $L^\infty(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi); \mathbb{R})$ に入る. そこで, $\mathbf{g}_{N i}$ の第 1 項は $L^\infty(\Gamma_N(\phi); \mathbb{R}^d)$ に入る. $\mathbf{g}_{N i}$ の他の項も同様の結果を得る. $\mathbf{g}_{\partial N i}$ は τ が $L^\infty(\partial\Gamma_N(\phi) \cup \Theta(\phi); \mathbb{R}^d)$ に入ることと同様の結果を得る. \square

なお, 本節では $b(\phi)$, $p_N(\phi)$, $u_D(\phi)$, $\zeta_i(\phi, u, \nabla u)$, $\eta_{N i}(\phi, u)$ および $v_{D i}(\phi)$ は物質固定を仮定した. 5 章で示した他の変動則を仮定した場合には, 形状微分の評価式に追加の項が現れる. ここでは, 詳細を省略する.

8.4 関数の形状偏微分公式を用いた評価法

次に、4.2 節で示した関数の形状偏微分公式を用いて \mathcal{L}_i の形状微分を求め、その結果を使って f_i の形状微分を求めてみる。

ここでは、 $b(\phi)$, $p_N(\phi)$, $u_D(\phi)$, $\zeta_i(\phi, \cdot, \cdot)$, $\eta_{Ni}(\phi, \cdot)$ および $v_{Di}(\phi)$ は空間固定であると仮定する。また、 $b(\phi)$ や $\zeta_i(\phi, u, \nabla u)$ などを b や $\zeta_i(u, \nabla u)$ などとかくことにする。

また、 u と v_i は $q > d$ に対して $W^{2,2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ に入るような条件が満たされていると仮定する。

これらの仮定の下で、命題 4.9 および 命題 4.12 を用いれば、 $\mathcal{L}_i(\phi, u, v_i)$ の形状偏微分は

$$(8.21) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_i^*(\phi, u, v_i)[\varphi] &= \mathcal{L}_{i\phi}(\phi, u, v_i)[\varphi] \\ &+ \mathcal{L}_{iu}(\phi, u, v_i)[u^*] + \mathcal{L}_{iv_i}(\phi, u, v_i)[v_i^*] \end{aligned}$$

のようにかくことができる。ここで、 $\mathcal{L}_{i\phi}(\phi, u, v_i)[\varphi]$ は u と v_i を固定したときの関数の形状偏微分を表し、(8.16) のそれとは異なるものとする。また、 u^* と v_i^* はそれぞれ u と v_i の形状偏微分 $u^*(\phi)[\varphi]$ と $v_i^*(\phi)[\varphi]$ を表し、 U の要素とする。

(8.21) の右辺第 3 項は、

$$(8.22) \quad \mathcal{L}_{iv_i}(\phi, u, v_i)[v_i^*] = \mathcal{L}_{Mv_i}(\phi, u, v_i)[v_i^*] = \mathcal{L}_M(\phi, u, v_i^*)$$

となる。(8.22) は主問題 (問題 6.1) の Lagrange 関数になっている。そこで、 u が主問題の弱解ならば、(8.21) の右辺第 3 項は 0 となる。

また、(8.21) の右辺第 2 項は、

$$(8.23) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{iu}(\phi, u, v_i)[u^*] &= \int_{\Omega(\phi)} (\zeta_{iu}(u, \nabla u)[u^*] + \zeta_{i\nabla u}(u, \nabla u)[\nabla u^*]) dx \\ &+ \int_{\Gamma_{\eta_i}(\phi)} \eta_{Niu}(u)[u^*] d\gamma - \int_{\Gamma_D(\phi)} v_{Di} \partial_\nu u^* d\gamma + \mathcal{L}_{Mu}(\phi, u, v_i)[u^*] \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\mathcal{L}_{Mu}(\phi, u, v_i)[u^*] = - \int_{\Omega(\phi)} \nabla u^* \cdot \nabla v_i dx + \int_{\Gamma_D(\phi)} \{u^* \partial_\nu v_i + v_i \partial_\nu u^*\} d\gamma$$

である。ここで、 v_i が、任意の $u^* \in U$ に対して、(8.23) が 0 となるように決定できれば、(8.21) の右辺第 2 項も 0 となる。この関係は、 v_i が随伴問題 (問題 8.3) の弱解のときに成り立つ。

さらに、(8.21) の右辺第 1 項は、

$$(8.24) \quad \mathcal{L}_{i\phi}(\phi, u, v_i)[\varphi] = f_{i\phi}(\phi, u)[\varphi] + \mathcal{L}_{M\phi}(\phi, u, v_i)[\varphi]$$

となる。ここで、(8.24) の右辺第 1 項は、命題 4.9 および 命題 4.12 より、

$$\begin{aligned}
f_{i\phi}(\phi, u)[\varphi] &= \int_{\partial\Omega(\phi)} \zeta_i(u, \nabla u) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\gamma \\
&+ \int_{\Gamma_{\eta_i}(\phi)} (\partial_\nu \eta_{Ni}(u) + \kappa \eta_{Ni}(u)) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\gamma + \int_{\partial\Gamma_{\eta_i}(\phi) \cup \Theta(\phi)} \eta_{Ni}(u) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\varsigma \\
&- \int_{\Gamma_D(\phi)} [v_{Di}(\bar{w}(\boldsymbol{\varphi}, u) + \partial_\nu u (\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})_\tau) + \{\partial_\nu (v_{Di} \partial_\nu u) + \kappa v_{Di} \partial_\nu u\} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi}] \, d\gamma \\
&- \int_{\partial\Gamma_D(\phi) \cup \Theta(\phi)} v_{Di} \partial_\nu u \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\varsigma
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\bar{w}(\boldsymbol{\varphi}, u)$ と $(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})_\tau$ はそれぞれ (4.10) と (3.6) に従う。また、(8.24) の右辺第 2 項は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{M\phi}(\phi, u, v_i)[\varphi] &= \int_{\partial\Omega(\phi)} (-\nabla u \cdot \nabla v_i + b v_i) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\gamma \\
&+ \int_{\Gamma_p(\phi)} \{\partial_\nu (p_N v_i) + \kappa (p_N v_i)\} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\gamma + \int_{\partial\Gamma_p(\phi) \cup \Theta(\phi)} p_N v_i \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\varsigma \\
&+ \int_{\Gamma_D(\phi)} [\{(u - u_D) \bar{w}(\boldsymbol{\varphi}, v_i) + v_i \bar{w}(\boldsymbol{\varphi}, u)\} + \{(u - u_D) \partial_\nu v_i + v_i \partial_\nu u\} (\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})_\tau \\
&+ \{\partial_\nu ((u - u_D) \partial_\nu v_i + v_i \partial_\nu u) + \kappa ((u - u_D) \partial_\nu v_i + v_i \partial_\nu u)\} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi}] \, d\gamma \\
&+ \int_{\partial\Gamma_D(\phi) \cup \Theta(\phi)} \{(u - u_D) \partial_\nu v_i + v_i \partial_\nu u\} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\varsigma
\end{aligned}$$

となる。ここで、問題 6.1 と問題 8.3 の Dirichlet 条件が成り立つことを考慮すれば、 $\mathcal{L}_{i\phi}$ における $\Gamma_D(\phi)$ 上の積分は 0 となる。

以上の結果を踏まえて、 u と v_i はそれぞれ問題 6.1 と問題 8.3 の弱解であると仮定すれば、(8.11) の表記を用いて

$$\begin{aligned}
\tilde{f}'_i(\phi)[\varphi] &= \mathcal{L}_{i\phi}(\phi, u, v_i)[\varphi] = \langle \bar{\mathbf{g}}_i, \boldsymbol{\varphi} \rangle \\
&= \int_{\partial\Omega(\phi)} \bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega i} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\gamma + \int_{\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta_i}(\phi)} \bar{\mathbf{g}}_{Ni} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\gamma \\
(8.25) \quad &+ \int_{\partial(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta_i}(\phi)) \cup \Theta(\phi)} \bar{\mathbf{g}}_{\partial Ni} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\varsigma + \int_{\Gamma_D(\phi)} \bar{\mathbf{g}}_{Di} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\gamma
\end{aligned}$$

とかくことができる。ここで、

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega i} &= (\zeta_i(u, \nabla u) - \nabla u \cdot \nabla v_i + b v_i) \boldsymbol{\nu}, \\
\bar{\mathbf{g}}_{Ni} &= \{\partial_\nu (p_N v_i) + \partial_\nu \eta_{Ni}(u) + \kappa (p_N v_i + \eta_{Ni}(u))\} \boldsymbol{\nu}, \\
\bar{\mathbf{g}}_{\partial Ni} &= (p_N v_i + \eta_{Ni}(u)) \boldsymbol{\tau}, \\
\bar{\mathbf{g}}_{Di} &= \{\partial_\nu (u - u_D) \partial_\nu v_i + \partial_\nu (v_i - v_{Di}) \partial_\nu u\} \boldsymbol{\nu}
\end{aligned}$$

となる.

以上の結果に基づけば, (8.25) の \bar{g}_i が入る関数空間について次の結果を得る.

定理 8.3 (f_i の形状微分 \bar{g}_i) $(\phi, u) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}$ に対して, $b(\phi)$, $p_N(\phi)$, $u_D(\phi)$, $\zeta_i(\phi, u, \nabla u)$, $\eta_{N_i}(\phi, u)$ および $v_{D_i}(\phi)$ は空間固定で, (6.3) および (7.2) を満たすとする. u と v_i はそれぞれ主問題 (問題 6.1) と随伴問題 (問題 8.3) の弱解で, $q > d$ に対して $W^{2,2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ に入るとする. このとき, f_i の形状微分は (8.25) の $\bar{g}_i \in X'$ となる. ここで, $\bar{g}_{\partial\Omega_i} \in L^\infty(\partial\Omega(\phi); \mathbb{R}^d)$, $\bar{g}_{N_i} \in L^\infty(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta_i}(\phi); \mathbb{R}^d)$, $\bar{g}_{\partial N_i} \in L^\infty(\partial(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta_i}(\phi)) \cup \Theta(\phi); \mathbb{R}^d)$, $\bar{g}_D \in L^\infty(\Gamma_D(\phi); \mathbb{R}^d)$ となる.

証明 f_i の形状微分が (8.25) の \bar{g}_i となることは上でみてきたとおりである. \bar{g}_i の正則性に関しては u と v_i が $W^{2,2q}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ に入ることを用いて, 定理 8.2 と同様に示すことができる. \square

以上の結果は, $b, p, u_D, \zeta_i(u, \nabla u), \eta_{N_i}(u)$ および v_{D_i} は空間固定であると仮定した下で得られた. 空間固定以外の変動則が与えられた場合でも, 5 章に示した関係を用いることで形状微分の評価式を求めることができる.

定理 8.2 と定理 8.3 の結果から, 形状最適化問題の正則性について次のことがいえる.

注意 8.1 (形状最適化問題の不正則性) 定理 8.2 と定理 8.3 より, (2.2) で定義された X に対して, g_i と \bar{g}_i はともに X' に入ることが確認された. すなわち, 評価関数の領域変動に対する Fréchet 微分を定義することはできたことになる. しかし, g_i と \bar{g}_i はともに設計変数の許容集合が入る線形空間 $Y = W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ に入るとは限らない. この結果は, $-g_i$ を φ に代入する勾配法で得られる $\phi + \varphi$ は Y の元となることが保証されないことを意味する. このことは, 1 章で説明した波打ち現象などの数値不安定現象が発生する一因になっていると考えられる.

9. H^1 勾配法

注意 8.1 で形状最適化問題の不正則性が指摘された. そこで, ここでは, 評価関数の形状微分を正則化する機能をもつ設計空間 X 上の勾配法について考える.

ある $i \in \{0, \dots, m\}$ に対して, 評価関数 $f_i(\phi, u)$ を選び, ある $\phi \in \mathcal{D}$ における形状微分 $g_i \in X'$ が与えられたと仮定する. これ以降は, (8.11) の表記を用いた $\tilde{f}_i(\phi)$ を $f_i(\phi)$ とかくことにする. f_i が減少する方向ベクトル (領域変動) を次の問題の解 $\varphi_{g_i} \in X$ によって求める方法を, 境界変動型の形状最適化問題に対する H^1 勾配法とよぶ.

問題 9.1 (形状最適化問題の f_i に対する H^1 勾配法) X を (2.2) で定義する. $a_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を X 上の有界かつ強圧的なある双 1 次形式とする. すなわち, 任意の $\varphi \in X$ と $\psi \in X$ に対して,

$$a_X(\varphi, \varphi) \geq \alpha \|\varphi\|_X^2, \quad \|a_X(\varphi, \psi)\|_{\mathbb{R}} \leq \beta \|\varphi\|_X \|\psi\|_X$$

が成り立つようなある正定数 α と β が存在するとする. $\phi \in \mathcal{D}$ において $g_i \in X'$ が与えられたとき, 任意の $\psi \in X$ に対して

$$(9.1) \quad a_X(\varphi_{g_i}, \psi) = -\langle g_i, \psi \rangle$$

を満たす $\varphi_{g_i} \in X$ を求めよ.

問題 9.1 で使われる X 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式 $a_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ の選び方には任意性がある. 以下の項では, いくつかの具体例を示すことにする.

9.1 H^1 空間の内積を用いた方法

実 Hilbert 空間 X 上の内積は強圧性をもつ. ここでは, その応用を考える.

(2.2) において $\bar{\Omega}_{C_0} = \emptyset$ を仮定してもよいことにする. $\varphi \in X = H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ に対して, $\nabla \varphi^T$ の対称成分を

$$\mathbf{E}(\varphi) = (e_{ij}(\varphi))_{ij} = \frac{1}{2} \left(\nabla \varphi^T + (\nabla \varphi^T)^T \right)$$

とおく^{*5}. また, c_Ω を $L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ に入るある正值関数とする. このとき,

$$(9.2) \quad a_X(\varphi, \psi) = \int_{\Omega(\phi)} (\mathbf{E}(\varphi) \cdot \mathbf{E}(\psi) + c_\Omega \varphi \cdot \psi) dx$$

は X 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式となる. ここで, c_Ω は被積分関数の第 1 項と第 2 項の重みを調整する働きをする. c_Ω を小さくとり, 第 1 項を支配的にすれば平滑化の機能が優先される. ただし, $c_\Omega = 0$ とすることは, 強圧性を失うことになり, H^1 勾配法で要求される条件を満たさないことになる.

さらに, $\mathbf{C} = (c_{ijkl})_{ijkl} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d})$ を線形弾性問題で使われる剛性テンソルとする. すなわち, 任意の対称テンソル $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ と $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ に対して

$$(9.3) \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} : \mathbf{A}) \geq \alpha \|\mathbf{A}\|^2, \quad |\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} : \mathbf{B})| \leq \beta \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$$

が成り立つような正定数 α と β が存在し, かつ対称性 $c_{ijkl} = c_{klij}$ をもつと仮定する. これを用いて, 応力テンソルを

$$(9.4) \quad \mathbf{S}(\varphi) = \mathbf{C} : \mathbf{E}(\varphi) = \left(\sum_{(k,l) \in \{1, \dots, d\}^2} c_{ijkl} e_{kl}(\varphi) \right)_{ij}$$

^{*5} 反対称成分を除外することは剛体回転運動を除外することを意味する.

とおく. このとき,

$$(9.5) \quad a_X(\varphi, \psi) = \int_{\Omega(\phi)} (\mathbf{S}(\varphi) \cdot \mathbf{E}(\psi) + c_\Omega \varphi \cdot \psi) dx$$

は X 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式となる. (9.5) の $a_X(\varphi, \psi)$ は, φ と ψ を変位とその変分とみなしたときの線形弾性問題におけるひずみエネルギーの変分を与える双 1 次形式となる. このとき, c_Ω は \mathbb{R}^d 上に配置された分布ばねのばね定数の意味をもつ.

さらに, f_i の形状微分が関数の形状微分公式 (8.3 節) で与えられ, (9.5) の $a_X(\varphi, \psi)$ を用いるとき, (9.1) の強形式は次のように求められる. u と v_i は $W^{2,2q}$ 級であると仮定すれば, (8.20) の右辺第 1 項は,

$$(9.6) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega(\phi)} (\mathbf{G}_{\Omega i} \cdot \nabla \varphi^{\mathbf{T}} + g_{\Omega i} \nabla \cdot \varphi) dx \\ &= \int_{\Omega(\phi)} \left\{ \nabla \cdot (\mathbf{G}_{\Omega i} \varphi) - (\nabla^{\mathbf{T}} \mathbf{G}_{\Omega i})^{\mathbf{T}} \cdot \varphi + \nabla \cdot (g_{\Omega i} \varphi) - (\nabla g_{\Omega i}) \cdot \varphi \right\} dx \\ &= \int_{\partial\Omega(\phi)} (\mathbf{G}_{\Omega i} + g_{\Omega i}) \boldsymbol{\nu} \cdot \varphi d\gamma - \int_{\Omega(\phi)} \left\{ (\nabla^{\mathbf{T}} \mathbf{G}_{\Omega i})^{\mathbf{T}} - \nabla g_{\Omega i} \right\} \cdot \varphi dx \\ &= \int_{\partial\Omega(\phi)} \tilde{\mathbf{g}}_{\partial\Omega i} \cdot \varphi d\gamma + \int_{\Omega(\phi)} \tilde{\mathbf{g}}_{\Omega i} \cdot \varphi dx \end{aligned}$$

のようにかきかえられる. ここで,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}_{\partial\Omega i} &= (\mathbf{G}_{\Omega i} + g_{\Omega i}) \boldsymbol{\nu} \\ \tilde{\mathbf{g}}_{\Omega i} &= (\nabla^{\mathbf{T}} \mathbf{G}_{\Omega i})^{\mathbf{T}} - \nabla g_{\Omega i} \end{aligned}$$

である *6. そこで, 強形式は次のようになる. この問題のイメージを図 10 (a) に示す.

問題 9.2 (H^1 内積を用いた H^1 勾配法 (関数の形状微分)) $\phi \in \mathcal{D}$ において, (8.20) の $\mathbf{g}_{\mathbf{N}i}$ と $\mathbf{g}_{\partial\mathbf{N}i}$ および (9.6) の $\tilde{\mathbf{g}}_{\Omega i}$ と $\tilde{\mathbf{g}}_{\partial\Omega i}$ が与えられたとき,

$$\begin{aligned} -\nabla^{\mathbf{T}} \mathbf{S}(\varphi_{gi}) + c_\Omega \varphi_{gi}^{\mathbf{T}} &= -\tilde{\mathbf{g}}_{\Omega i}^{\mathbf{T}} \quad \text{in } \Omega(\phi), \\ \mathbf{S}(\varphi_{gi}) \boldsymbol{\nu} &= -\mathbf{g}_{\mathbf{N}i} - \tilde{\mathbf{g}}_{\partial\Omega i} \quad \text{on } \Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi), \\ \mathbf{S}(\varphi_{gi}) \boldsymbol{\tau} &= -\mathbf{g}_{\partial\mathbf{N}i} \quad \text{on } \partial(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi)) \cup \Theta(\phi), \\ \mathbf{S}(\varphi_{gi}) \boldsymbol{\nu} &= -\tilde{\mathbf{g}}_{\partial\Omega i} \quad \text{on } \partial\Omega(\phi) \setminus (\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi)) \end{aligned}$$

を満たす φ_{gi} を求めよ.

また, 評価関数 f_i の形状微分を関数の形状偏微分公式 (8.4 節) で与えられたとき, (9.5) の $a_X(\varphi, \psi)$ を用いたときの (9.1) の強形式は次のようになる. この問題のイメージを図 10 (b) に示す.

*6 原論文では $\tilde{\mathbf{g}}_{\partial\Omega i}$ の右辺に $\boldsymbol{\nu}$ がなかった.

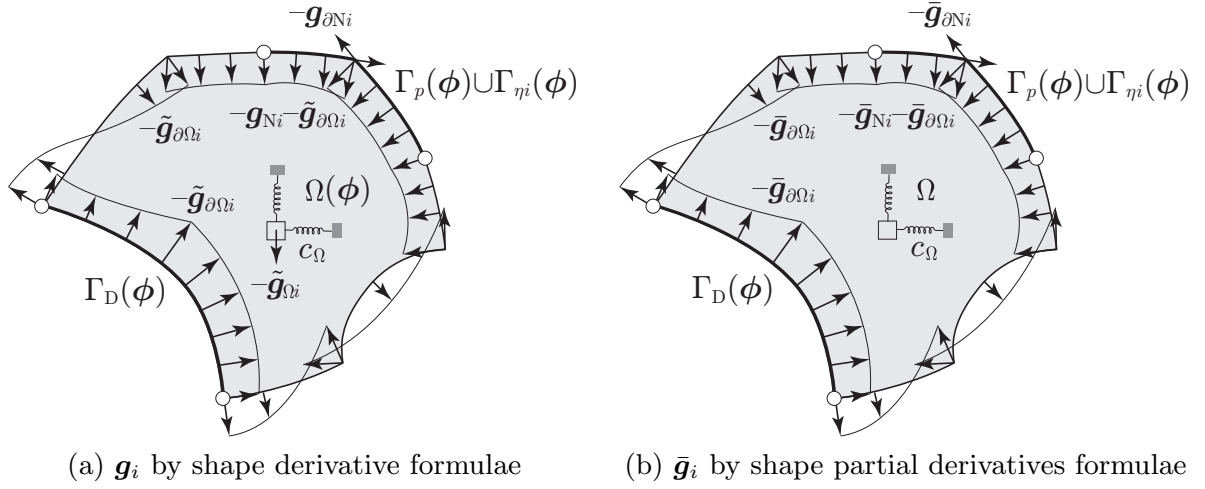


Fig. 10. H^1 gradient method using inner product of $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$

問題 9.3 (H^1 内積を用いた H^1 勾配法 (関数の形状偏微分)) $\phi \in \mathcal{D}$ において, (8.25) の $\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i}$, $\bar{\mathbf{g}}_{N_i}$ および $\bar{\mathbf{g}}_{\partial N_i}$ とが与えられたとき,

$$\begin{aligned}
-\nabla^T \mathbf{S}(\varphi_{g_i}) + c_\Omega \varphi_{g_i}^T &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}^T \quad \text{in } \Omega(\phi), \\
\mathbf{S}(\varphi_{g_i}) \boldsymbol{\nu} &= -\bar{\mathbf{g}}_{N_i} - \bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i} \quad \text{on } \Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta_i}(\phi), \\
\mathbf{S}(\varphi_{g_i}) \boldsymbol{\tau} &= -\bar{\mathbf{g}}_{\partial N_i} \quad \text{on } \partial(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta_i}(\phi)) \cup \Theta(\phi), \\
\mathbf{S}(\varphi_{g_i}) \boldsymbol{\nu} &= -\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i} \quad \text{on } \partial\Omega(\phi) \setminus (\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta_i}(\phi))
\end{aligned}$$

を満たす φ_{g_i} を求めよ.

9.2 境界条件を用いた方法

また, 境界条件を追加することで双 1 次形式 $a_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ に強圧性をもたせることができる.

最初に, Dirichlet 境界条件を用いることを考える. (2.2) において, $\bar{\Omega}_{C_0} (\subset \bar{\Omega}_0)$ を設計上の要請で固定する領域あるいは境界を表すことにした. ここでは, $\bar{\Omega}_{C_0}$ は領域あるいは境界の測度がある正值をもつと仮定する. このとき,

$$(9.7) \quad a_X(\varphi, \boldsymbol{\psi}) = \int_{\Omega(\phi) \setminus \bar{\Omega}_{C_0}} \mathbf{S}(\varphi) \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{\psi}) \, dx$$

は X 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式となる. なぜならば, $\bar{\Omega}_{C_0}$ の測度が正で, $\bar{\Omega}_{C_0}$ 上で $\varphi = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ のとき, Korn の不等式の系より, $\Omega(\phi) \setminus \bar{\Omega}_{C_0}$ だけに依存する正定数 c が存在して,

$$a_X(\varphi, \varphi) \geq \alpha \|\mathbf{E}(\varphi)\|_{L^2(\Omega(\phi) \setminus \bar{\Omega}_{C_0}; \mathbb{R}^{d \times d})}^2 \geq c \|\varphi\|_{H^1(\Omega(\phi) \setminus \bar{\Omega}_{C_0}; \mathbb{R}^d)}^2$$

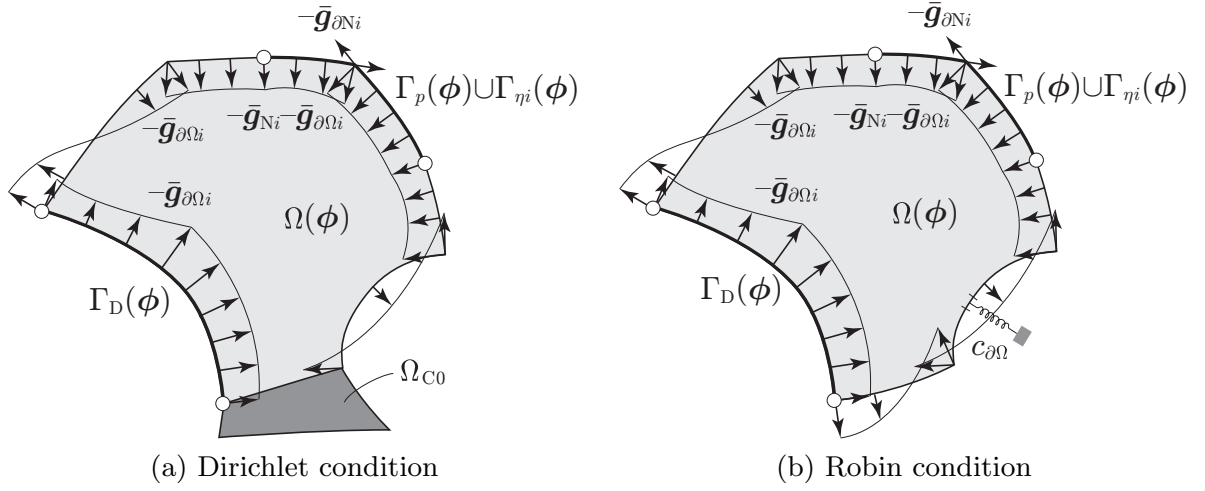


Fig. 11. H^1 gradient methods using boundary conditions

が成り立つためである。ただし、 α は (9.3) を満たす正定数である。このときの強形式は次のようになる。ここでは、評価関数 f_i の形状微分を関数の形状偏微分公式 (8.4 節) で与えられた場合だけを示す。

問題 9.4 (Dirichlet 条件を用いた H^1 勾配法 (関数の形状偏微分)) $\phi \in \mathcal{D}$ において、(8.25) の $\bar{g}_{\partial\Omega_i}$, \bar{g}_{N_i} および $\bar{g}_{\partial N_i}$ が与えられたとき、

$$\begin{aligned}
-\nabla^T \mathbf{S}(\varphi_{gi}) &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{in } \Omega(\phi) \setminus \bar{\Omega}_{C0}, \\
\mathbf{S}(\varphi_{gi}) \boldsymbol{\nu} &= -\bar{\mathbf{g}}_{N_i} - \bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i} \quad \text{on } (\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta_i}(\phi)) \setminus \bar{\Omega}_{C0}, \\
\mathbf{S}(\varphi_{gi}) \boldsymbol{\nu} &= -\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i} \quad \text{on } \partial\Omega(\phi) \setminus (\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta_i}(\phi) \cup \bar{\Omega}_{C0}), \\
\mathbf{S}(\varphi_{gi}) \boldsymbol{\tau} &= -\bar{\mathbf{g}}_{\partial N_i} \quad \text{on } \{\partial(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta_i}(\phi)) \cup \Theta(\phi)\} \setminus \bar{\Omega}_{C0}, \\
\varphi_{gi} &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } \bar{\Omega}_{C0}
\end{aligned}$$

を満たす φ_{gi} を求めよ。

問題 9.4 のイメージを図 11 (a) に示す。この問題は、 $\Omega(\phi)$ を線形弾性体と仮定して、 $\bar{\Omega}_{C0}$ を固定して残りの境界に境界力 $\bar{\mathbf{g}}_{\partial\Omega_i}$, $\bar{\mathbf{g}}_{N_i}$ および $\bar{\mathbf{g}}_{\partial N_i}$ を作用させたときの変位 φ_{gi} を求める問題になっている。このような解釈から、問題 9.4 は力法とよばれてきた [3]。

さらに、Robin 条件を用いれば、(2.2) において $\bar{\Omega}_{C0} = \emptyset$ を仮定しても $a_X(\varphi, \psi)$ の強圧性を得ることができる。ある正值関数 $c_{\partial\Omega} \in L^\infty(\partial\Omega(\phi); \mathbb{R})$ を選び、

$$(9.8) \quad a_X(\varphi, \psi) = \int_{\Omega(\phi)} \mathbf{S}(\varphi) \cdot \mathbf{E}(\psi) \, dx + \int_{\partial\Omega(\phi)} c_{\partial\Omega}(\varphi \cdot \boldsymbol{\nu})(\psi \cdot \boldsymbol{\nu}) \, d\gamma$$

とおく。このときの強形式は次のようになる。ここでも、評価関数 f_i の形状微分を関数の形状偏微分公式 (8.4 節) で与えられた場合だけを示す。

問題 9.5 (Robin 型力法の強形式 (関数の形状偏微分)) $\phi \in \mathcal{D}$ において, (8.25) の $\bar{g}_{\partial\Omega i}$, $\bar{g}_{N i}$ および $\bar{g}_{\partial N i}$ とが与えられたとき,

$$\begin{aligned} -\nabla^T \mathbf{S}(\varphi_{g_i}) &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{in } \Omega(\phi), \\ \mathbf{S}(\varphi_{g_i}) \boldsymbol{\nu} + c_{\partial\Omega}(\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} &= -\bar{g}_{\partial\Omega i} - \bar{g}_{N i} \quad \text{on } \Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi), \\ \mathbf{S}(\varphi_{g_i}) \boldsymbol{\tau} &= -\bar{g}_{\partial N i} \quad \text{on } \partial(\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi)) \cup \Theta(\phi), \\ \mathbf{S}(\varphi_{g_i}) \boldsymbol{\nu} + c_{\partial\Omega}(\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} &= -\bar{g}_{\partial\Omega i} \quad \text{on } \partial\Omega(\phi) \setminus (\Gamma_p(\phi) \cup \Gamma_{\eta i}(\phi)) \end{aligned}$$

を満たす φ_{g_i} を求めよ.

問題 9.5 のイメージを図 11 (b) に示す. この問題は, $\Omega(\phi)$ を線形弾性体と仮定して, $\partial\Omega(\phi)$ にばね定数 $c_{\partial\Omega}$ の分布ばねを配置した下で, 境界に $\bar{g}_{\partial\Omega i}$, $\bar{g}_{N i}$ および $\bar{g}_{\partial N i}$ を作用させたときの変位 φ_{g_i} を求める問題になっている. このような解釈から, 問題 9.5 はばね付き力法, あるいは Robin 型力法とよばれてきた [9].

9.3 H^1 勾配法の正則性

問題 9.1 とその具体例として挙げた問題 9.2 から問題 9.5 の弱解に対して, 次の結果を得る. ただし, $\Omega(\phi)$ が 2 次元領域のときには, $\partial\Omega(\phi)$ 上の凹角の角点, 混合境界条件の境界 $\partial\Gamma_D(\phi)$ の開き角は $\pi/2$ 以上の角点, $\Omega(\phi)$ が 3 次元領域のときには, $\partial\Omega(\phi)$ 上の凹角の辺, 混合境界条件の境界 $\partial\Gamma_D(\phi)$ の開き角が $\pi/2$ 以上の辺の近傍を特異点近傍とよび $B(\phi)$ とかくことにする.

定理 9.1 (H^1 勾配法の正則性) 定理 8.2 の g_i あるいは定理 8.3 の \bar{g}_i を用いたときの問題 9.2 から問題 9.5 の弱解 $\varphi_{g_i} \in X$ は一意に存在する. φ_{g_i} は $\Omega(\phi) \setminus B(\phi)$ 上で $W^{1,\infty}$ 級となる. また, φ_{g_i} による領域変動により f_i は減少する.

証明 問題 9.2 の弱解 φ_{g_i} は, 定理 8.2 より, 領域においては $\mathbf{G}_{\Omega i} \in L^q(\Omega(\phi); \mathbb{R}^{d \times d})$ と $g_{\Omega i} \in L^q(\Omega(\phi); \mathbb{R})$ が与えられ, 境界においては $\mathbf{g}_{N i} \in L^\infty(\Gamma_N(\phi); \mathbb{R}^d)$ と $\mathbf{g}_{\partial N i} \in L^\infty(\partial\Gamma_N(\phi) \cup \Theta(\phi); \mathbb{R}^d)$ が Neumann 境界条件として与えられたときの楕円型偏微分方程式を満たす. そこで, Lax-Milgram の定理より $\varphi_{g_i} \in X$ は一意に存在する. また, φ_{g_i} の正則性に関して, $\Omega(\phi) \setminus B(\phi)$ 上では, φ_{g_i} は $W^{2,q}$ 級となる. これに Sobolev の埋蔵定理を適用すれば, $2 - d/q > 1$ より φ_{g_i} は $\Omega(\phi) \setminus B(\phi)$ 上で $W^{1,\infty}$ 級となる. 同様に, 問題 9.3 の弱解 φ_{g_i} は, 定理 8.3 より, $\bar{g}_{\partial\Omega i} \in L^\infty(\partial\Omega(\phi); \mathbb{R}^d)$, $\bar{g}_{N i} \in L^\infty(\Gamma_N(\phi); \mathbb{R}^d)$ および $\bar{g}_{\partial N i} \in L^\infty(\partial\Gamma_N(\phi) \cup \Theta(\phi); \mathbb{R}^d)$ を Neumann 境界条件とする楕円型偏微分方程式を満たす. そこで, Lax-Milgram の定理より, 弱解 $\varphi_{g_i} \in X$ は一意に存在し, $\Omega(\phi) \setminus B(\phi)$ 上で $W^{1,\infty}$ 級となる. 問題 9.4 と問題 9.5 の弱解 φ_{g_i}

についても同様の結果を得る．さらに，問題 9.2 から問題 9.5 の弱解 φ_{gi} に対して，

$$\begin{aligned} f_i(\phi + \varphi_{gi}) - f_i(\phi) &= \langle \mathbf{g}_i, \varphi_{gi} \rangle + o(\|\varphi_{gi}\|_X) \\ &= -a_X(\varphi_{gi}, \varphi_{gi}) + o(\|\varphi_{gi}\|_X) \leq -\alpha \|\varphi_{gi}\|_X^2 + o(\|\varphi_{gi}\|_X) \end{aligned}$$

が成り立つ． □

定理 9.1 の結果と (2.1) で定義された領域写像の許容集合 \mathcal{D} との関係について次のことがいえる．

注意 9.1 (形状最適化問題に対する H^1 勾配法) 定理 9.1 より，形状最適化問題に対する H^1 勾配法によって得られる領域変動 φ_{gi} は，領域写像の許容集合 \mathcal{D} を含む線形空間 Y に特異点近傍を除いて入ることが確かめられた．これにより，特異点近傍を除いて，連続写像により領域が動かせることになる．しかしながら， $\phi + \varphi_{gi}$ の逆写像が全単射 (1 対 1 写像) になるための十分条件 $\|\phi + \varphi_{gi}\|_Y < \sigma$ を満たすことや $(\Gamma_p(\phi + \varphi_{gi}) \cup \Gamma_{\eta 0}(\phi + \varphi_{gi}) \cup \Gamma_{\eta 1}(\phi + \varphi_{gi}) \cup \cdots \cup \Gamma_{\eta m}(\phi + \varphi_{gi})) \setminus \bar{\Omega}_{C0}$ が C^2 級になることは保障されない．これらの条件を満たさないことに起因する数値不安定現象などが発生した場合には，これらの条件を満たすようにする追加の処置を考える必要がある．

また，問題 9.1 は，

$$(9.9) \quad q(\varphi_{gi}) = \min_{\varphi \in X} \left\{ q(\varphi) = \frac{1}{2} a_X(\varphi, \varphi) + \langle \mathbf{g}_i, \varphi \rangle + f_i(\phi) \right\}$$

を満たす $\varphi_{gi} \in X$ を求めることと同値である．そこで， H^1 勾配法は， $f_i(\phi)$ の $\varphi \in X$ に対する 2 階の Fréchet 微分を $a_X(\varphi, \varphi)$ で代用したときの修正 Newton 法とみなすことができる．

10. 形状最適化問題の解法

最後に，境界変動型の形状最適化問題 (問題 7.1) の解を求める方法について考える．9 章では，ある $i \in \{1, \dots, m\}$ を選んだとき，評価関数 $f_i(\phi)$ の形状微分 \mathbf{g}_i が与えられたならば， $f_i(\phi)$ が減少する領域変動は H^1 勾配法の解 φ_{gi} として求められることが示された (定理 9.1)．ここでは，それらの解を使って不等式制約問題 (問題 7.1) の解を求めることを考える．

9 章では， H^1 勾配法は，領域変動 $\varphi \in X$ に対する 2 階の Fréchet 微分を $a_X(\varphi, \varphi)$ で代用したときの修正 Newton 法になっていることを指摘した．そのとき， f_i に対する 2 次の近似関数は (9.9) の $q(\varphi_{gi})$ で与えられた．ここでは，次の近似問題を繰り返し解く方法を考える．その方法は，設計変数が入る X 上の逐次 2 次近似法に対応する．

問題 10.1 (逐次 2 次近似問題) $\phi \in \mathcal{D}$ に対して, f_0, \dots, f_m とそれらの形状微分 $\mathbf{g}_0, \dots, \mathbf{g}_m$ が与えられたと仮定する. a_X を問題 9.1 で使われた双 1 次形式とする. c_a をステップサイズを調整する正定数とする. このとき,

$$(10.1) \quad q(\varphi_g) = \min_{\varphi \in X} \left\{ q(\varphi) = \frac{c_a}{2} a_X(\varphi, \varphi) + \langle \mathbf{g}_0, \varphi \rangle \mid \begin{aligned} & f_1(\phi) + \langle \mathbf{g}_1, \varphi \rangle \leq 0, \\ & \dots, f_m(\phi) + \langle \mathbf{g}_m, \varphi \rangle \leq 0 \end{aligned} \right\}$$

を満たす $\varphi_g \in X$ を求めよ.

問題 10.1 の Lagrange 関数を

$$(10.2) \quad \mathcal{L}_S(\varphi, \boldsymbol{\lambda}) = q(\varphi) + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i (f_i(\phi) + \langle \mathbf{g}_i, \varphi \rangle)$$

とおく. ここで, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m$ は不等式制約条件に対する Lagrange 乗数である. ここで, φ_g が問題 10.1 の解ならば, 任意の $\psi \in X$ に対して, KKT 条件:

$$(10.3) \quad c_a a_X(\varphi_g, \psi) + \left\langle \mathbf{g}_0 + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i \mathbf{g}_i, \psi \right\rangle = 0,$$

$$(10.4) \quad f_i(\phi) + \langle \mathbf{g}_i, \varphi_g \rangle \leq 0 \quad \text{for } i \in \{1, \dots, m\},$$

$$(10.5) \quad \lambda_i (f_i(\phi) + \langle \mathbf{g}_i, \varphi_g \rangle) = 0 \quad \text{for } i \in \{1, \dots, m\},$$

$$(10.6) \quad \lambda_i \geq 0 \quad \text{for } i \in \{1, \dots, m\},$$

が成り立つ (例えば [23]). これらを満たす φ_g は次のようにして求められる.

$\varphi_{g0}, \dots, \varphi_{gm}$ を H^1 勾配法 (問題 9.1) の解とする. ただし, (9.1) を

$$(10.7) \quad c_a a_X(\varphi_{gi}, \psi) = -\langle \mathbf{g}_i, \psi \rangle$$

に変更する. このとき,

$$(10.8) \quad \varphi_g = \varphi_{g0} + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i \varphi_{gi}$$

は, (10.3) を満たす. また, (10.4) が等号で成り立つならば,

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{g}_1, \varphi_{g1} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{g}_1, \varphi_{gm} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{g}_m, \varphi_{g1} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{g}_m, \varphi_{gm} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_1(\phi) + \langle \mathbf{g}_1, \varphi_{g0} \rangle \\ \vdots \\ f_m(\phi) + \langle \mathbf{g}_m, \varphi_{g0} \rangle \end{pmatrix}$$

が成り立つ. この式を

$$(10.9) \quad (\langle \mathbf{g}_i, \varphi_{gj} \rangle)_{ij} (\lambda_j)_j = -(f_i(\phi) + \langle \mathbf{g}_i, \varphi_{g0} \rangle)_i$$

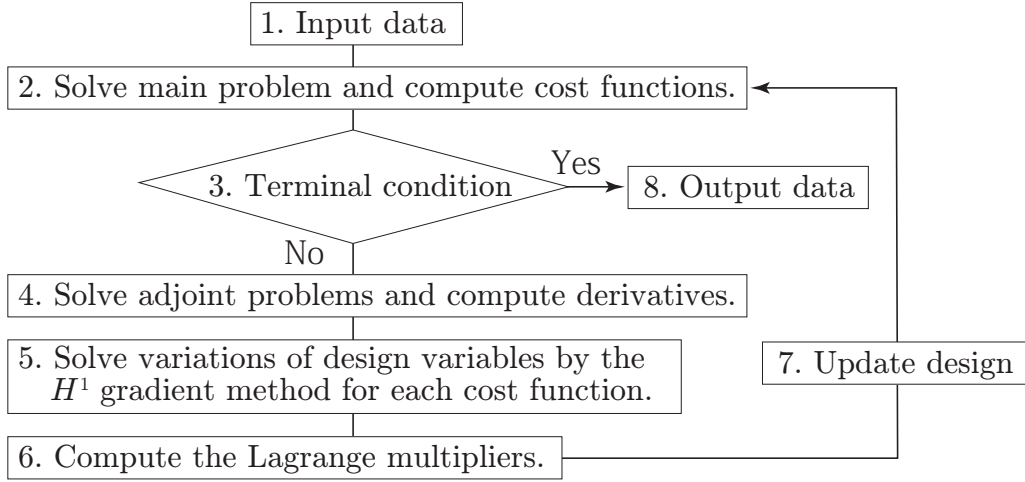


Fig. 12. Algorithm of sequential quadratic approximation method using H^1 gradient method

とかく.

これらの関係に基づいて、問題 7.1 に対する数値解法を考える．ここでは、(10.8) の φ_g の大きさ $\|\varphi_g\|_X$ をステップサイズとよび、それを決め打ちで与える簡易法のアルゴリズムを示す．その後で、より合理的にステップサイズを決定する方法について考察する．なお、ステップサイズの制御は、(10.7) の c_a によって行われることに注意する．また、簡単のために、初期領域 Ω_0 においては、 $f_1 = \dots = f_m = 0$ である ((7.1) の c_i をそのように与える) と仮定する．

まず、 c_a を決め打ちで与える簡易法について考える．初期領域 Ω_0 に対して、 f_1, \dots, f_m を計算し、8 章の結果を用いて $\mathbf{g}_0, \dots, \mathbf{g}_m$ を計算する．次に、それらを用いて (10.7) による H^1 勾配法の解 $\varphi_{g_0}, \dots, \varphi_{g_m}$ を求める．これらの結果を用いて、(10.9) の $(\langle \mathbf{g}_i, \varphi_{g_j} \rangle)_{ij}$ と $-(\langle \mathbf{g}_i, \varphi_{g_0} \rangle)_i$ を計算する．ここで、本質的に同値の制約関数が使われていなければ、 $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$ は 1 次独立 ($(\langle \mathbf{g}_i, \varphi_{g_j} \rangle)_{ij}$ のランクは m) になり、 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ は一意に決定される．その結果、有効な評価関数に対する添え字の集合

$$(10.10) \quad I_A = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid (10.4), (10.5), (10.6)\}$$

を求め、 $i \notin I_A$ に対して $\lambda_i = 0$ とおき、 I_A に含まれる制約条件のみを残した (10.9) を解くことを繰り返す．このようにして得られた $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ と (10.8) によって得られた φ_g は KKT 条件 (10.3) から (10.6) を満たすことになる．この φ_g を用いて領域を変動させれば、新領域 $\Omega(\phi) = \Omega(\varphi_g)$ が得られる．このような領域変動を収束するまで繰り返す．以上の手順をまとめると次のようになる (図 12)．

アルゴリズム 10.1 (逐次 2 次近似法) 問題 7.1 の数値解を次のようにして求める．

1. Ω_0 を選ぶ． $f_1 = \dots = f_m = 0$ を満たすように c_1, \dots, c_m を定める． c_a を選ぶ．

$k = 0$ および $\phi_0 = i$ (恒等写像) とおく.

2. $\Omega(\phi_k)$ において主問題 (問題 6.1) を解き, f_0, \dots, f_m を計算する.
3. 停止条件を判定する. 満たされたときは 8 に進む. 満たされないときは次に進む.
4. 随伴問題 (問題 8.3) を解き, g_0, \dots, g_m を計算する.
5. (10.7) による H^1 勾配法 (問題 9.1) で $\varphi_{g_0}, \dots, \varphi_{g_m}$ を計算する.
6. (10.9) で λ を計算する. ただし, $i \notin I_A$ に対して $\lambda_i = 0$ とおき, I_A に含まれる制約条件のみを残した (10.9) を解くことを繰り返す.
7. (10.8) で φ_g を求め, $\phi_{k+1} = \phi_k + \varphi_g$ とおき, 変数 k に $k+1$ の値を代入して, 2 に戻る.
8. 計算を終了する.

次に, ステップサイズをより合理的に決定する方法について考える. ここでは, 次の項目に分けてみていくことにする.

- (i) 正定数 ϵ を与えて, 初期の領域変動においてステップサイズ $\|\varphi_g\|_X$ が ϵ となるように c_a を決定する方法
- (ii) 変動後の領域において, (10.4) から (10.6) が満たされるように $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ を補正する方法
- (iii) 評価関数の非線形性に起因する誤差に応じてステップサイズを制御する方法

上記 (i) は, 次のようにして実現される. c_a の初期値を 1 とおく. 初回に (10.7) による H^1 勾配法 (問題 9.1) を適用し, $\varphi_{g_0}, \dots, \varphi_{g_m}$ を求める. 次に, (10.9) により, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ を求める. この際, $f_1(\phi) = \dots = f_m(\phi) = 0$ を仮定しているので, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ を決定するのに $\varphi_{g_0}, \dots, \varphi_{g_m}$ の大きさは依存しないことに注意する. $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ が得られれば, (10.8) により φ_g を求めることができる. この φ_g を用いて, $c_a = \|\varphi_g\|_X / \epsilon$ とおく. 2 回目以降, この c_a を用いれば, H^1 勾配法によって得られた $\varphi_{g_0}, \dots, \varphi_{g_m}$ による (10.8) の φ_g の大きさはおよそ ϵ となる. なお, 初回については, $c_a = 1$ とおいて得られた φ_g に $1/c_a$ を乗ずればよい. また, $\|\varphi_g\|_X$ をセミノルム $|\varphi_g|_{W^{1,\infty}(\Omega_0; \mathbb{R}^d)}$ で代用し, ϵ を最大主ひずみの領域全体にわたる最大値の目安とみなして, 数 % の数値を与える方法などが考えられる. ここで示した工夫は, アルゴリズム 10.1 のステップ 7 において, $k = 0$ のときに, φ_g を求めた後で, $c_a = \|\varphi_g\|_X / \epsilon$ の計算を挿入することで実現される.

また, 上記 (ii) については次のような方法が考えられる. 簡易法で使われた $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ の計算法では, 逐次 2 次近似問題 (問題 10.1) の KKT 条件は満たされていても, 変動後の領域では, 不等式制約は満たされていない可能性がある. 変動後の領域で確実に不等式制約が満たされるためには, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ を補正する必要がある. ここでは, (10.8) の φ_g を $\varphi_g(\lambda)$ と表すことにして, すべての $i \in \{1, \dots, m\}$ に対して (10.4) から (10.6) が満

たされるまで,

$$(10.11) \quad \begin{aligned} & \langle \mathbf{g}_i(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}_g(\boldsymbol{\lambda})), \boldsymbol{\varphi}_{g_j} \rangle_{(i,j) \in I_A^2} (\delta \lambda_j)_{j \in I_A} = - (f_i(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}_g(\boldsymbol{\lambda})))_{i \in I_A}, \\ & \delta \lambda_i = 0 \quad \text{for } i \notin I_A \end{aligned}$$

によって $\delta \boldsymbol{\lambda} = (\delta \lambda_1, \dots, \delta \lambda_m)^\top$ を求め, $\boldsymbol{\lambda} + \delta \boldsymbol{\lambda}$ を $\boldsymbol{\lambda}$ に更新する方法が考えられる. この工夫は, アルゴリズム 10.1 のステップ 6 において, (10.11) の計算を挿入することで実現される. その際, 実際に領域を $\Omega(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}_g(\boldsymbol{\lambda}))$ に更新したときの $i \in I_A$ に対する \mathbf{g}_i と f_i を求める必要がある.

さらに, 上記 (iii) については, Armijo の規準 [2] と Wolfe の規準 [77] を満たすようにステップサイズを制御する方法が考えられる. これらの規準は, 有限次元ベクトル空間で定義された非線形関数に対して使われてきた. 本論文では, 関数空間上で定義された非線形関数に対して, 正則な Fréchet 微分が与えられているという仮定の下で形式的に適用することにする. 原問題 (問題 7.1) の Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\lambda}) = f_0(\boldsymbol{\phi}) + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i f_i(\boldsymbol{\phi})$$

とおく. ここで, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ は原問題に対する KKT 条件を満たす不等式制約条件に対する Lagrange 乗数である. このとき, Armijo の規準:

$$(10.12) \quad \mathcal{L}(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}_g, \boldsymbol{\lambda}) - \mathcal{L}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\lambda}) \leq \xi \left\langle \mathbf{g}_0 + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i \mathbf{g}_i, \boldsymbol{\varphi}_g \right\rangle$$

はステップサイズの上限を与える. ここで, $\xi \in (0, 1)$ は許容範囲を制御する定数である. また, Wolfe の規準:

$$(10.13) \quad \mu \left\langle \mathbf{g}_0 + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i \mathbf{g}_i, \boldsymbol{\varphi}_g \right\rangle \leq \left\langle \mathbf{g}_{0 \text{ new}} + \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} \lambda_i \mathbf{g}_{i \text{ new}}, \boldsymbol{\varphi}_g \right\rangle$$

はステップサイズの下限を与える. ここで, μ は許容範囲を制御する $0 < \xi < \mu < 1$ を満たす定数である. また, $(\cdot)_{\text{new}}$ は $\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}_g$ のときの値を表す. Armijo の規準と Wolfe の規準が満たされるようにステップサイズを制御していけば, 大域的収束性 (初期点が最小点から十分離れていても, 最小点に収束する性質) が成り立つことが示される [76, 84]. これらの規準は, アルゴリズム 10.1 のステップ 7 において, これらの規準が満たされるように c_a の値を修正する操作を挿入することで実現される. その際, ここでも, 実際に領域を $\Omega(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varphi}_g)$ に更新したときの $i \in I_A$ に対する \mathbf{g}_i と f_i を求める必要がある.

11. おわりに

本論文では, 境界変動型の形状最適化問題を関数最適化問題の枠組みに沿って構成し, その解法までを示した. その結果, 注意 8.1 で示したように, 評価関数の形状

微分 ($X = H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ 上の Fréchet 微分) は設計変数の許容集合が入る線形空間 $Y = W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ には入らないことが確認された。この結果は、形状最適化問題の不正則性を表している。しかし、注意 9.1 に示したように、評価関数の形状微分を正則化する機能をもつ $X = H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ 上の勾配法 (H^1 勾配法) を用いれば、特異点近傍を除いて $Y = W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ に入る領域変動が得られることが確認された。また、本論文では触れなかったが、Galerkin 有限要素法などの数値解法を用いた場合の誤差評価は別報に示されている [58]。これらの結果は、境界変動型の形状最適化問題の数値解法として使われてきた方法 (H^1 勾配法) は妥当な方法になっていたことを裏付ける結果となった。反面、その裏付けを得るために使われた仮定はこの方法の適用限界を示したことになる。

現在、数値解析は様々な分野で利用され、それらに最適化の機能を付加する検討がなされている。本論文の結果が、形状最適化機能を開発する際のヒントを与えることになれば幸である。

謝辞 本論文は、長年にわたる先達の先生方のご教示を受けながら気づかされてきた内容をまとめたものである。海津聰先生、田端正久先生、大塚厚二先生、木村正人先生、田上大助先生ほかご指導いただいた先生方に感謝の意を表す。また、査読者の方々には著者が気づかなかった表現の誤りについてご指摘をいただき、改善することができた。深く感謝する次第である。

参考文献

- [1] Adams, R. A. and Fournier, J. J. F., Sobolev spaces, 2nd ed., Academic Press, Amsterdam; Tokyo, 2003.
- [2] Armijo, L., Minimization of functions having lipschitz-continuous first partial derivatives, Pacific J. Math., **16** (1966), 1–3.
- [3] 畔上秀幸, 領域最適化問題の一解法, 日本機械学会論文集 A 編, **60**(574) (1994), 1479–1486.
- [4] 畔上秀幸, 形状最適化問題の解法, 計算工学, **2**(4) (1997), 239–247.
- [5] Azegami, H., Fukumoto, S. and Aoyama, T., Shape optimization of continua using NURBS as basis functions, Structural and Multidisciplinary Optimization, **47**(2) (2013), 247–258.
- [6] Azegami, H., Kaizu, S. and Takeuchi, K., Regular solution to topology optimization problems of continua, JSIAM Letters, **3** (2011), 1–4.
- [7] Azegami, H., Ohtsuka, K. and Kimura, M., Shape derivative of cost function for singular point: Evaluation by the generalized J integral, to be published in JSIAM Letters, **6** (2014).

- [8] 畔上秀幸, 須貝康弘, 下田昌利, 座屈に対する形状最適化, 日本機械学会論文集 A 編, **66**(647) (2000), 1262–1267.
- [9] Azegami, H. and Takeuchi, K., A smoothing method for shape optimization: Traction method using the Robin condition, *International Journal of Computational Methods*, **3**(1) (2006), 21–33.
- [10] 畔上秀幸, 呉志強, 線形弾性問題における領域最適化解析 (力法によるアプローチ), 日本機械学会論文集 A 編, **60**(578) (1994), 2312–2318.
- [11] Azegami, H., Yokoyama, S. and Katamine, E., Solution to shape optimization problems of continua on thermal elastic deformation, In Tanaka, M. and Dulikravich, G. S., editors, *Inverse Problems in Engineering Mechanics III*, Chap. 2, Sec. 1, 61–66, Elsevier, Tokyo, 2002.
- [12] Azegami, H., Zhou, L., Umemura, K. and Kondo, N., Shape optimization for a link mechanism, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **48**(1) (2013), 115–125.
- [13] Banichuk, N. V., Optimality conditions and analytical methods of shape optimization, In Haug, E. J. and Cea, J., editors, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, Vol. 2, 973–1004, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1981.
- [14] Banichuk, N. V., *Problems and Methods of Optimal Structural Design*, Plenum Press, New York, 1983.
- [15] Banichuk, N. V., *Introduction to Optimization of Structures*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [16] Cea, J., Numerical methods of shape optimal design, In Haug, E. J. and Cea, J., editors, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, Vol. 2, 1049–1088, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1981.
- [17] Cea, J., Problems of shape optimization, In Haug, E. J. and Cea, J., editors, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, Vol. 2, 1005–1048, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1981.
- [18] Chenais, D., On the existence of a solution in a domain identification problem, *J. Math. Anal. Appl.*, **52** (1975), 189–219.
- [19] Choi, K. K., Shape design sensitivity analysis of displacement and stress constraints, *J. Struct. Mech.*, **13** (1985), 27–41.
- [20] Choi, K. K. and J., H. E., Shape design sensitivity analysis of elastic structures, *J. Struct. Mech.*, **11** (1983), 231–269.

- [21] Choi, K. K. and Kim, N. H., Structural sensitivity analysis and optimization, 1 & 2, Springer, New York, 2005.
- [22] Evans, L. C. and Gariepy, R. F., Measure theory and fine properties of functions, CRC Press, Boca Raton, 1992.
- [23] 藤田宏, 今野浩, 田邊國士, 最適化法, 岩波書店, 東京, 1994.
- [24] Grisvard, P., Elliptic problems in nonsmooth domains, Pitman Advanced Pub. Program, Boston, 1985.
- [25] Hadamard, J., Mémoire des savants etrangers. Oeuvres de J. Hadamardchapter Mémoire sur le problème d'analyse relatif á l'équilibre des plaques élastiques encastrées, Mémoire des savants etrangers, Oeuvres de J. Hadamard, 515–629, CNRS, Paris, 1968.
- [26] Haslinger, J. and Mäkinen, R. A. E., Introduction to Shape Optimization: Theory, Approximation, and Computation, SIAM, Philadelphia, 2003.
- [27] Haslinger, J. and Neittaanmäki, P., Finite Element Approximation for Optimal Shape Design: Theory and Application, John Wiley & Sons, Chichester, 1988.
- [28] Haslinger, J. and Neittaanmäki, P., Finite element approximation for optimal shape, material and topology design, 2nd ed., John Wiley & Sons, Chichester, 1996.
- [29] Haug, E. J., Choi, K. K. and Komkov, V., Design Sensitivity Analysis of Structural Systems, Academic Press, Orland, 1986.
- [30] Horák, V., Inverse Variational Principles of Continuum Mechanics, Academia, nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1969.
- [31] 井原久, 畔上秀幸, 下田昌利, 幾何学的非線形性を考慮した変位経路制御問題に対する形状最適化, 日本機械学会論文集 A 編, **67**(656) (2001), 611–617.
- [32] 井原久, 畔上秀幸, 下田昌利, 渡邊勝彦, 材料非線形性を考慮した形状最適化問題の解法, 日本機械学会論文集 A 編, **66**(646) (2000), 1111–1118.
- [33] 井原久, 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明, 位相最適化と形状最適化の統合による多目的構造物の形状設計 (均質化法と力法によるアプローチ), 日本機械学会論文集 A 編, **62**(596) (1996), 1091–1097.
- [34] 井原久, 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明, 位相－形状最適化手法に基づく変位規定問題の数値解析法, 自動車技術会論文集, **29**(1) (1998), 117–122.
- [35] Imam, M. H., Three-dimensional shape optimization, Int. J. Num. Meth. Engrg., **18** (1982), 661–673.

- [36] Inzarulfaisham, A. R. and Azegami, H., Shape optimization of linear elastic continua for moving nodes of natural vibration modes to assigned positions and its application to chassis-like frame structures, Transactions of JSCES(Japan Society for Computational Engineering and Science), **7** (2004), 43–50.
- [37] Inzarulfaisham, A. R. and Azegami, H., Solution to boundary shape optimization problem of linear elastic continua with prescribed natural vibration mode shapes, Structural and Multidisciplinary Optimization, **27**(3) (2004), 210–217.
- [38] Iwai, T., Sugimoto, A., Aoyama, T. and Azegami, H., Shape optimization problem of elastic bodies for controlling contact pressure, JSIAM Letters, **2** (2010), 1–4.
- [39] Iwata, Y., Azegami, H., Aoyama, T. and Katamine, E., Numerical solution to shape optimization problems for non-stationary navier-stokes problems, JSIAM Letters, **2** (2010), 37–40.
- [40] 海津聰, 畔上秀幸, 最適形状問題と力法について, 日本応用数理学会論文誌, **16**(3) (2006), 277–290.
- [41] 片峯英次, 畔上秀幸, 粘性流れ場領域最適化問題の解法 (力法によるアプローチ), 日本機械学会論文集 B 編, **60**(579) (1994), 3859–3866.
- [42] 片峯英次, 畔上秀幸, ポテンシャル流れ場の領域最適化解析, 日本機械学会論文集 B 編, **61**(581) (1995), 103–108.
- [43] 片峯英次, 畔上秀幸, 粘性流れ場の領域最適化解析 (対流項を考慮した場合), 日本機械学会論文集 B 編, **61**(585) (1995), 1646–1653.
- [44] Katamine, E., Azegami, H. and Hirai, M., Solution of shape identification problems on thermoelastic solids, International Journal of Computational Methods, **3**(3) (2006), 279–293.
- [45] 片峯英次, 畔上秀幸, 小嶋雅美, 定常熱伝導場における境界形状決定, 日本機械学会論文集 B 編, **65**(629) (1999), 275–281.
- [46] 片峯英次, 畔上秀幸, 松浦易広, 非定常熱伝導場における形状同定問題の解法, 日本機械学会論文集 B 編, **66**(641) (2000), 227–234.
- [47] Katamine, E., Azegami, H., Tsubata, T. and Itoh, S., Solution to shape optimization problems of viscous flow fields, International Journal of Computational Fluid Dynamics, **19**(1) (2005), 45–51.
- [48] 片峯英次, 畔上秀幸, 山口正太郎, ポテンシャル流れ場の形状同定解析 (圧力分布規定問題と力法による解法), 日本機械学会論文集 B 編, **64**(620) (1998), 1063–1070.
- [49] 片峯英次, 岩田侑太朗, 畔上秀幸, 放熱量最大化を目的とした非定常熱伝導場の形状

- 最適化, 日本機械学会論文集 B 編, **74**(743) (2008), 1609–1616.
- [50] 片峯英次, 河瀬賀行, 畔上秀幸, 強制熱対流場の形状最適化, 日本機械学会論文集 B 編, **73**(733) (2007), 1884–1891.
- [51] 片峯英次, 西橋直志, 畔上秀幸, 抗力最小化・揚力最大化を目的とした定常粘性流れ場の形状最適化, 日本機械学会論文集 B 編, **74**(748) (2008), 2426–2434.
- [52] Katamine, E., Tsubata, T. and Azegami, H., Solution to shape optimization problem of viscous flow fields considering convection term, In Tanaka, M., editor, *Inverse Problems in Engineering Mechanics IV* 401–408, Elsevier, Tokyo, 2003.
- [53] 片峯英次, 吉岡広起, 松浦浩佑, 畔上秀幸, 平均コンプライアンス最小化を目的とした熱弾性場の形状最適化, 日本機械学会論文集 B 編, **77**(783) (2011), 4015–4023.
- [54] Kimura, M., Shape derivative of minimum potential energy: abstract theory and applications, Jindřich Nečas Center for Mathematical Modeling Lecture notes Volume IV, *Topics in Mathematical Modeling*, (2008), 1–38.
- [55] 木村正人, 若野功, 亀裂進展に伴うエネルギー解放率の数学解析に関する再考察, 日本応用数理学会論文誌, **16**(3) (2006), 345–358.
- [56] McLean, W., *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [57] 宮島静雄, *ソボレフ空間の基礎と応用*, 共立出版, 東京, 2006.
- [58] Murai, D. and Azegami, H., Error analysis of H1 gradient method for shape optimization problems of continua, *JSIAM Letters*, **5** (2013), 29–32.
- [59] Murat, F. and Simon, S., *Etudes de problèmes d’optimal design*, In *Lecture Notes in Computer Science* 41, 54–62, Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [60] Ohtsuka, K. and Khludnev, A., Generalized J-integral method for sensitivity analysis of static shape design, *Control and Cybernetics*, **29** (2000), 513–533.
- [61] Pironneau, O., On optimum profiles in Stokes flow, *J. Fluid. Mech.*, **59**(1) (1973), 117–128.
- [62] Pironneau, O., On optimum design in fluid mechanics, *J. Fluid. Mech.*, **64**(1) (1974), 97–110.
- [63] Pironneau, O., *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [64] Polya, G., Torsion rigidity, principal frequency, electrostatic capacity and symmetrization, *Quarterly Appl. Math.*, **6** (1948), 267–277.
- [65] 下田昌利, 畔上秀幸, 井原久, 桜井俊明, 複数荷重を考慮した線形弾性体の形状最適化

- (力法による体積最小問題), 日本機械学会論文集 A 編, **61**(587) (1995), 1545–1552.
- [66] 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明, 複数荷重を考慮した線形弾性体の多目的形状最適化 (平均コンプライアンス最小化問題を例として), 日本機械学会論文集 A 編, **61**(582) (1995), 359–366.
- [67] 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明, ホモログラス変形を目的とする連続体の形状決定, 日本機械学会論文集 A 編, **62**(604) (1996), 2831–2837.
- [68] 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明, 応力分布を規定した連続体の境界形状決定, 日本機械学会論文集 A 編, **62**(602) (1996), 2393–2400.
- [69] 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明, 形状最適化におけるミニマックス問題の数値解法 (最大応力と最大変位の最小設計), 日本機械学会論文集 A 編, **63**(607) (1997), 610–617.
- [70] Shimoda, M., Tsuji, J. and Azegami, H., Minimum weight shape design for the natural vibration problem of plate and shell structures, In Hernandez, S. and Brebbia, C. A., editors, Computer Aided Optimum Design in Engineering IX, 147–156, WIT Press, Southampton, UK, 2005.
- [71] Shimoda, M., Tsuji, J. and Azegami, H., Non-parametric shape optimization method for thin-walled structures under strength criterion, In Hernandez, S. and Brebbia, C. A., editors, Computer Aided Optimum Design in Engineering X, 179–188, WIT Press, Southampton, UK, 2007.
- [72] 下田昌利, 呉志強, 畔上秀幸, 桜井俊明, 汎用 F E M コードを利用した領域最適化問題の数値解析, 日本機械学会論文集 A 編, **60**(578) (1994), 2418–2425.
- [73] 新谷浩平, 長谷高明, 伊藤聡, 畔上秀幸, サスペンション部品の非線形座屈現象に関する形状最適化の検討, 日本機械学会論文集 A 編, **74**(748) (2011), 1187–1198.
- [74] Simon, J., Differentiation with respect to the domain in boundary value problems, Numerical functional analysis and optimization, **2**(7-8) (1980), 649–687.
- [75] Sokolowski, J. and Zolésio, J. P., Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [76] 田村明久, 村松正和, 最適化法, 共立出版, 東京, 2002.
- [77] Wolfe, P., Convergence conditions for ascent methods, SIAM Review, **11** (1969), 226–235.
- [78] 呉志強, 畔上秀幸, 固有振動問題における領域最適化解析 (力法によるアプローチ), 日本機械学会論文集 C 編, **61**(583) (1995), 930–937.
- [79] 呉志強, 畔上秀幸, 固有振動問題における領域最適化解析 (質量最小化問題), 日本機械学会論文集 C 編, **61**(587) (1995), 2653–2696.

- [80] 吳志強, 畔上秀幸, 周波数応答問題における領域最適化解析 (力法によるアプローチ), 日本機械学会論文集 C 編, **61**(590) (1995), 3968–3975.
- [81] Wu, Z. Q., Sogabe, Y., Arimitsu, Y. and Azegami, H., Shape optimization of transient response problems, In Tanaka, M. and Dulikravich, G. S., editors, *Inverse Problems in Engineering Mechanics II*, Chap. 5, Sec. 2, 28–294, Elsevier, Tokyo, 2000.
- [82] Wu, Z. Q., Sogabe, Y. and Azegami, H., Shape optimization analysis for frequency response problems of solids with proportional viscous damping, *Key Engineering Materials*, **145-149** (1997), 227–232.
- [83] 吳志強, 曾我部雄次, 畔上秀幸, 比例粘性減衰を考慮した周波数応答問題における領域最適化解析, 日本機械学会論文集 C 編, **64**(623) (1998), 2618–2624.
- [84] 矢部博, 工学基礎 : 最適化とその応用, 数理工学社, 東京, 2006.
- [85] Zolésio, J. P., Domain variational formulation for free boundary problems, In Haug, E. J. and Cea, J., editors, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, Vol. 2, 1152–1194, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1981.
- [86] Zolésio, J. P., The material derivative (or speed) method for shape optimization, In Haug, E. J. and Cea, J., editors, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, Vol. 2, 1089–1151, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1981.

畔上 秀幸 (正会員) 〒464-8601 名古屋市千種区不老町 A4-2 (780)

1985 年東京大学大学院工学系研究科博士課程修了, 工学博士. 現在, 名古屋大学大学院情報科学研究科教授. 日本応用数学会, 日本機械学会, 自動車技術会, 日本側彎症学会, 日本計算工学会, IACM, ISSMO 会員. 計算力学. 特に最適設計に興味を持つ.