音場・構造連成問題における形状最適化

Shape Optimization on Acoustic-Structure Interaction Problems

1) 長谷川 義明, 2) 鍵山 恭彦 , 3,*) 畔上 秀幸

1,3) 名古屋大学, 2) 本田技術研究所

1)Yoshiaki HASEGAWA, 2)Yasuhiko KAGIYAMA , 3)Hideyuki AZEGAMI

1,3) Nagoya University, 2) Honda R & D Co. Tochigi R & D Center

*Email: azegami@is.nagoya-u.ac.jp

キーワード: 偏微分方程式, 音場・構造連成問題, 形状最適化問題, 勾配法, 力法

Keywords: Partial differential equation, Acoustic-Structure Interaction Problem, Shape optimization problem, Gradient method, Traction method

1. はじめに

音場と構造の連成問題は車両の振動騒音対策の解析モデルとして使われる．本報では，この問題の形状最適化問題を定式化し，形状勾配の評価式を明らかにする．形状勾配が評価できれば既存の形状最適化法[1],[2]で具体的な問題を解くことができる．本報では箱型モデルの結果を示す．

2. 音場・構造連成問題

有界な領域 $\Omega^{\rm s} \subset \Omega^{\rm fix} \subset \mathbb{R}^d$ $(d=2,3)$ ，その境界 $\Gamma^{\rm s}$, で定義された線形弾性体に囲まれた音場の領域 $\Omega^{\rm a}$ ，その境界 $\Gamma^{\rm a} \subset \Gamma^{\rm s}$ を考える．弾性体は，部分境界 Γ_0 で変位が拘束され，時間 $t \in (-\infty, \infty)$ に亘って残りの部分境界に零でない境界力 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, t)$ $(\boldsymbol{x} \in \Gamma^P)$ が作用すると仮定する．ただし，境界力は弾性体の形状変動には影響しない固定元 $\boldsymbol{P} \in \left(H^{-1}\left(\Omega^{\rm fix} \times (-\infty, \infty)\right)\right)^d$ とする．$\boldsymbol{P}$ が作用したとき，弾性体は変位 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ $(\boldsymbol{x} \in \Omega^{\rm s})$ を生じ，音場は音圧 $p(\boldsymbol{x}, t)$ $(\boldsymbol{x} \in \Omega^{\rm a})$ を生ずるものと仮定する．本論文では，弱形式の対称性を得るために音圧 p の代わりに速度ポテンシャル ϕ $(p = \rho^{\rm a}\dot{\phi})$ を用いる．

弾性体の密度を $\rho^{\rm s}$，音場の密度を $\rho^{\rm a}$ とする．音場・構造連成問題の運動方程式と境界条件は次式となる．

$$\frac{\rho^{\rm a}}{c^2}\ddot{\phi} - \rho^{\rm a}\phi_{,ii} = 0 \quad \text{in } \Omega^{\rm a} \tag{1}$$

$$\rho^{\rm a}\phi_{,i}n_i^{\rm a} + \rho^{\rm a}\dot{u}_i n_i^{\rm a} = 0 \quad \text{on } \Gamma^{\rm a} \tag{2}$$

$$\rho^{\rm s}\ddot{u}_i - \sigma_{ij,j}(\boldsymbol{u}) = 0 \quad \text{in } \Omega^{\rm s} \tag{3}$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{u})n_j^{\rm s} + \rho^{\rm a}\dot{\phi}n_i^{\rm s} = 0 \quad \text{on } \Gamma^{\rm a} \tag{4}$$

$$u_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_0 \tag{5}$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{u})n_j^{\rm s} - P_i = 0 \quad \text{on } \Gamma^P \tag{6}$$

添え字に対して $(\,\cdot\,)_{,i} \equiv \partial(\,\cdot\,)/\partial x_i$ および総和規約を用いる．応力 $\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) = C_{ijkl}\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})$ $(\{C_{ijkl}\}_{i,j,k,l=1}^d$ は剛性)，ひずみ $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ とする．$\boldsymbol{n}^{\rm m} = \{n_i^{\rm m}\}_{i=1}^d$ は $\Omega^{\rm m}$ の境界における外向き単位法線である．

この問題の運動方程式に，任意の随伴速度ポテンシャル $\varphi \in \Phi$ と任意の随伴変位 $\boldsymbol{v} \in U$ を乗じて積分し，境界条件を考慮することによって次の弱形式を得る．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{ a^{\rm a}(\phi,\varphi) + b^{\rm a}(\ddot{\phi},\varphi) + c^{\rm a}(\varphi,\dot{\boldsymbol{u}}) + a^{\rm s}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b^{\rm s}(\ddot{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{v}) + c^{\rm s}(\dot{\phi},\boldsymbol{v})\Big\}\,{\rm d}t = \int_{-\infty}^{\infty}\langle \boldsymbol{P},\boldsymbol{v}\rangle_{\Gamma^P}\,{\rm d}t$$

$$\phi \in \Phi,\ \boldsymbol{u} \in U,\ \forall\varphi \in \Phi,\ \forall\boldsymbol{v} \in U \tag{7}$$

ただし，以下の定義に従う．

$$a^{\rm a}(\phi,\varphi) \equiv \int_{\Omega^{\rm a}} \rho^{\rm a}\phi_{,i}\varphi_{,i}\,{\rm d}\Omega \tag{8}$$

$$a^{\rm s}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \equiv \int_{\Omega^{\rm s}} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\,{\rm d}\Omega \tag{9}$$

$$b^{\rm a}(\phi,\varphi) \equiv \int_{\Omega^{\rm a}} \frac{\rho^{\rm a}}{c^2}\phi\varphi\,{\rm d}\Omega \tag{10}$$

$$b^{\rm s}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \equiv \int_{\Omega^{\rm s}} \rho^{\rm s}u_i v_i\,{\rm d}\Omega \tag{11}$$

$$c^{\rm a}(\varphi,\boldsymbol{u}) \equiv \int_{\Gamma^{\rm a}} \rho^{\rm a}\varphi u_i n_i^{\rm a}\,{\rm d}\Gamma \tag{12}$$

$$c^{\rm s}(\phi,\boldsymbol{v}) \equiv \int_{\Gamma^{\rm a}} \rho^{\rm a}\phi v_i n_i^{\rm s}\,{\rm d}\Gamma \tag{13}$$

$$\langle \boldsymbol{P},\boldsymbol{v}\rangle_{\Gamma^P} \equiv \int_{\Gamma^P} P_i v_i\,{\rm d}\Gamma \tag{14}$$

$$\Phi \equiv \left\{\varphi \in H^1\left(\Omega^{\rm a} \times (-\infty,\infty)\right)\right\} \tag{15}$$

$$U \equiv \left\{\boldsymbol{v} \in \left(H^1\left(\Omega^{\rm s} \times (-\infty,\infty)\right)\right)^d \,\middle|\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ on } \Gamma_0\right\} \tag{16}$$

ここで，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},t)$ の Fourier 変換を $\hat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x},\omega)$ とする．

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{\boldsymbol{P}}e^{j\omega t}\,{\rm d}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \tag{17}$$

ただし，j は単位虚数を表す．同様に ϕ, $\boldsymbol{u}$, φ, $\boldsymbol{v}$ の Fourier 変換を $\hat{\phi}$, $\hat{\boldsymbol{u}}$ $\hat{\varphi}$, $\hat{\boldsymbol{v}}$ と表し，逆 Fourier 変換関係 (式 (17)) を弱形式 (7) に代入し，さらに音場の音響減衰係数を $g^{\rm a}$，線形弾性体の構造減衰係数を $g^{\rm s}$ とすれば，減衰を仮定した音場・構造連成問題の周波数領域における弱形式を得る．

$$A(\hat{\phi},\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\varphi},\hat{\boldsymbol{v}}) = [\langle\hat{\boldsymbol{P}},\hat{\boldsymbol{v}}^*\rangle_{\Gamma^P}]_\omega \quad \forall\varphi \in \Phi,\ \forall\boldsymbol{v} \in U \tag{18}$$

ただし，$(\,\cdot\,)^*$ は複素共役を表す．

$$A(\hat{\phi},\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\varphi},\hat{\boldsymbol{v}}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\Big\{(1+jg^{\rm a})a^{\rm a}(\hat{\phi},\hat{\varphi}^*) - \omega^2 b^{\rm a}(\hat{\phi},\hat{\varphi}^*) + j\omega c^{\rm a}(\hat{\varphi}^*,\hat{\boldsymbol{u}}) + (1+jg^{\rm s})a^{\rm s}(\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{v}}^*) - \omega^2 b^{\rm s}(\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{v}}^*) + j\omega c^{\rm s}(\hat{\phi},\hat{\boldsymbol{v}}^*)\Big\}\,{\rm d}\omega \tag{19}$$

$$[\langle\hat{\boldsymbol{P}},\hat{\boldsymbol{v}}^*\rangle_{\Gamma^P}]_\omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\langle\hat{\boldsymbol{P}},\hat{\boldsymbol{v}}^*\rangle_{\Gamma^P}\,{\rm d}\omega \tag{20}$$

式 (18) の左辺は $\hat{\phi}$, $\hat{\boldsymbol{u}}$ と $\hat{\varphi}$, $\hat{\boldsymbol{v}}$ に対して可換であり，周波数ごとに対称なマトリクス表示が可能である．この性質は，随伴問題を原問題の左辺を変換するだけで計算できることを意味する．

3.　指定部分領域における音圧パワー最小化問題

車両設計では耳元の音圧パワーを下げることが目標とされる．耳元近傍の部分領域 $\Omega^{\mathrm{D}} \subset \Omega^{\mathrm{a}}$，その境界 Γ^{D}，周波数帯 $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ の音圧パワー $\hat{p}\hat{p}^* = -\omega^2 \rho^{\mathrm{a}2} \hat{\phi}\hat{\phi}^*$，および線形弾性体の体積制約 ($m_0$ 以下) は次式で与えられる．

$$J^{[0]}(\Omega^{\mathrm{s}}, \hat{\phi}) \equiv \int_{\omega_1}^{\omega_2} -\omega^2 d(\hat{\phi}, \hat{\phi}^*)\, \mathrm{d}\omega \tag{21}$$

$$d(\hat{\phi}, \hat{\phi}^*) \equiv \int_{\Omega^{\mathrm{D}}} \rho^{\mathrm{a}2} \hat{\phi}\hat{\phi}^*\, \mathrm{d}\Omega \tag{22}$$

$$J^{[1]}(\Omega^{\mathrm{s}}) \equiv \int_{\Omega^{\mathrm{s}}} \mathrm{d}\Omega - m_0 \leq 0 \tag{23}$$

体積制約の Lagrange 乗数を $\Lambda^{[1]}$ として，Lagrange 乗数形式 $L(\Omega^{\mathrm{s}}, \hat{\phi}, \Lambda^{[1]})$ を用いれば，音圧パワー最小化問題は次式で与えられる．

$$\min_{\Omega^{\mathrm{s}} \subset \Omega^{\mathrm{fix}}} \max_{0 \leq \Lambda^{[1]} \in \mathbb{R}} \left\{ L \equiv J^{[0]} + \Lambda^{[1]} J^{[1]} \right\} \tag{24}$$

Kuhn-Tucker 条件より，$\Lambda^{[1]}$ は次式で決定される．

$$\Lambda^{[1]} J^{[1]} = 0, \quad J^{[1]} \leq 0, \quad \Lambda^{[1]} \geq 0 \tag{25}$$

L の領域変動に対する物質導関数 $\dot{L}$ は次式となる．

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \dot{J}^{[0]} + \Lambda^{[1]} \dot{J}^{[1]} \\ &= -\omega^2 \left\{ [d(\hat{\phi}', \hat{\phi}^*)]_\omega + [d(\hat{\phi}, \hat{\phi}^{*\prime})]_\omega \right\} \\ &\quad + [\langle G^{[0]\mathrm{D}} \boldsymbol{n}^{\mathrm{D}}, \boldsymbol{V} \rangle_{\Gamma^{\mathrm{D}}}]_\omega + \Lambda^{[1]} [\langle G^{[1]} \boldsymbol{n}, \boldsymbol{V} \rangle_{\Gamma^{\mathrm{s}}}]_\omega \end{aligned} \tag{26}$$

$$G^{[0]\mathrm{D}} = -\omega^2 \rho^{\mathrm{a}2} \hat{\phi}\hat{\phi}^* \quad \text{on } \Gamma^{\mathrm{D}} \tag{27}$$

$$G^{[1]} = 1 \quad \text{on } \Gamma^{\mathrm{s}} \tag{28}$$

ただし，$[\,\cdot\,]_\omega$ は式 (20) の定義に従う．$\boldsymbol{V}$ は領域変動速度である．$(\,\cdot\,)' = (\dot{\,\cdot\,}) - (\,\cdot\,)_{,i} V_i$ は形状導関数，$(\dot{\,\cdot\,})$ は物質導関数を表す[2]．

原問題の弱形式 (18) に対して，任意の領域変動に対する物質導関数を計算し，$\hat{\phi}$, $\hat{\boldsymbol{u}}$ は原問題の解，さらに，$\boldsymbol{v} \in U$, $\varphi \in \Phi$ であることを考慮すれば，次式を得る．

$$\begin{aligned} A(\hat{\phi}', \hat{\boldsymbol{u}}', \hat{\varphi}, \hat{\boldsymbol{v}}) &= [\langle G^{[0]\mathrm{a}} \boldsymbol{n}^{\mathrm{a}}, \boldsymbol{V} \rangle_{\Gamma^{\mathrm{a}}}]_\omega \\ &\quad + [\langle G^{[0]\mathrm{s}} \boldsymbol{n}^{\mathrm{s}}, \boldsymbol{V} \rangle_{\Gamma^{\mathrm{s}}}]_\omega + [\langle G^{[0]P} \boldsymbol{n}^{\mathrm{s}}, \boldsymbol{V} \rangle_{\Gamma^P}]_\omega \\ &\boldsymbol{v} \in U, \ \varphi \in \Phi, \ \forall \phi' \in \Phi, \ \forall \boldsymbol{u}' \in U \end{aligned} \tag{29}$$

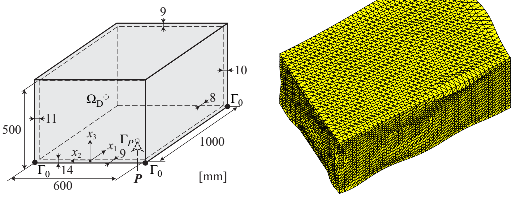
$$\begin{aligned} G^{[0]\mathrm{a}} &= -(1 + j g^{\mathrm{a}}) \rho^{\mathrm{a}} \hat{\phi}_{,i} \hat{\varphi}^*_{,i} + \omega^2 \frac{\rho^{\mathrm{a}}}{c^2} \hat{\phi}\hat{\varphi}^* \\ &\quad - j\omega \left\{ \rho^{\mathrm{a}} \left(\hat{\varphi}^* \hat{u}_i - \hat{\phi}\hat{v}_i^* \right) n_i^{\mathrm{a}} \right\}_{,j} n_j^{\mathrm{a}} \\ &\quad - j\omega\rho^{\mathrm{a}} \left(\hat{\varphi}^* \hat{u}_i - \hat{\phi}\hat{v}_i^* \right) n_i^{\mathrm{a}} \kappa^{\mathrm{a}} \quad \text{on } \Gamma^{\mathrm{a}} \end{aligned} \tag{30}$$

$$G^{[0]\mathrm{s}} = -(1 + j g^{\mathrm{s}}) \sigma_{ij}(\hat{\boldsymbol{u}}) \varepsilon_{ij}(\hat{\boldsymbol{v}}^*) + \omega^2 \rho^{\mathrm{s}} \hat{u}_i \hat{v}_i^* \quad \text{on } \Gamma^{\mathrm{s}} \tag{31}$$

$$G^{[0]P} = (\hat{P}_i \hat{v}_i^*)_{,j} n_j^{\mathrm{s}} + \hat{P}_i \hat{v}_i^* \kappa^{\mathrm{s}} \quad \text{on } \Gamma^P \tag{32}$$

ただし，κ^{m} は Ω^{m} の境界における平均曲率の $d-1$ 倍である．ここで，随伴問題を次式で定義する．

$$\begin{aligned} A(\hat{\phi}', \hat{\boldsymbol{u}}', \hat{\varphi}, \hat{\boldsymbol{v}}) &= -\omega^2 \left\{ [d(\hat{\phi}', \hat{\phi}^*)]_\omega + [d(\hat{\phi}, \hat{\phi}^{*\prime})]_\omega \right\} \\ &\boldsymbol{v} \in U, \ \varphi \in \Phi, \ \forall \phi' \in \Phi, \ \forall \boldsymbol{u}' \in U \end{aligned} \tag{33}$$



Initial shape　　Optimized shape

Fig. 1　Box model

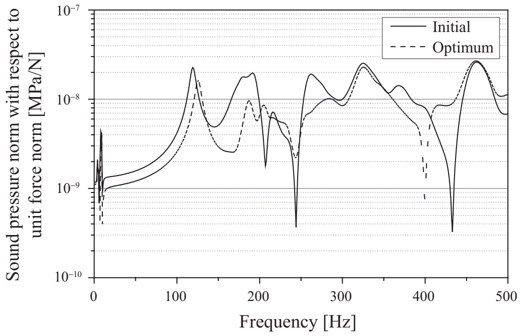


Fig. 2　Frequency response of sound pressure norm

この問題の解 $\hat{\varphi}$, $\hat{\boldsymbol{v}}$ を用いれば，式 (26) の右辺第 1 項は式 (33) の右辺と等しく，さらに，式 (33) の左辺は，式 (29) の右辺に等しいことから，次式を得る．

$$\begin{aligned} \dot{J}^{[0]} &= [\langle G^{[0]\mathrm{a}} \boldsymbol{n}^{\mathrm{a}}, \boldsymbol{V} \rangle_{\Gamma^{\mathrm{a}}}]_\omega + [\langle G^{[0]\mathrm{s}} \boldsymbol{n}^{\mathrm{s}}, \boldsymbol{V} \rangle_{\Gamma^{\mathrm{s}}}]_\omega \\ &\quad + [\langle G^{[0]P} \boldsymbol{n}^{\mathrm{s}}, \boldsymbol{V} \rangle_{\Gamma^P}]_\omega + [\langle G^{[0]\mathrm{D}} \boldsymbol{n}^{\mathrm{D}}, \boldsymbol{V} \rangle_{\Gamma^{\mathrm{D}}}]_\omega \\ &= [\langle G^{[0]} \boldsymbol{n}^{\mathrm{s}}, \boldsymbol{V} \rangle_{\Gamma^{\mathrm{s}}}]_\omega \end{aligned} \tag{34}$$

ただし，音場領域 Ω^{a} の変動を拘束し，速度 $\boldsymbol{V}$ の許容集合 D を次のように定義する．

$$D = \left\{ \boldsymbol{V} \in (W^{1,\infty}(\Omega^{\mathrm{a}} \cup \Omega^{\mathrm{s}}))^d \;\middle|\; \boldsymbol{V} = \boldsymbol{0} \text{ on } \Omega^{\mathrm{s}} \right\} \tag{35}$$

$G^{[0]} \boldsymbol{n}^{\mathrm{s}}$ は音圧パワーに対する形状勾配である．

目的汎関数と制約汎関数の形状勾配が $G^{[0]}$, $G^{[1]}$ に基いて計算されれば，最適化に向う形状更新は力法によって解析できる[1], [2]．

4.　解析例

図 1 に線形弾性体の箱の中に音場があるモデルに対する問題設定と形状変動を 10 倍に拡大した最適化後の形状を示す．形状変動は箱の外側境界のみとした．解析ソルバーには MSC.NASTRAN の周波数応答解析機能を用いた．形状最適化解析は自作のプログラムを用いた．図 2 に最適化前と最適化後の $||\hat{p}||_{L^2(\Omega^{\mathrm{D}})} / ||\boldsymbol{P}||_{(L^2(\Gamma^P))^3}$ を示す．90 から 225 [Hz] において音圧低下が認められる．

参考文献

[1] 畔上秀幸．領域最適化問題の一解法．日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 60, pp. 1479–1486, 1994.

[2] 畔上秀幸. 形状最適化問題の解法. 応用数理, Vol. 11, No. 3, pp. 49–52, 2001.