

勾配法に基づく形状最適化スキームにおける収束性の改善

Improvement of Convergency in Shape Optimization Scheme Based on Gradient Method

^{1,*} 畔上秀幸, ²⁾ 竹内謙善

1) 名古屋大学, 2) (株) くいんと

¹⁾Hideyuki AZEGAMI, ²⁾Kenzen TAKEUCHI

1) Nagoya University, 2) Quint Corp.

*Email: azegami@is.nagoya-u.ac.jp

キーワード: 偏微分方程式, 境界値問題, 形状最適化問題, 勾配法, 力法

Keywords: Partial differential equation, Boundary value problem, Shape optimization problem, Gradient method, Traction method

1. はじめに

弾性体や流れ場などの境界形状を設計対象にした形状最適化問題は偏微分方程式の境界値問題が定義された領域が位相を変えずに変動する場合の目的汎関数最小化問題として一般化される^[1]. 通常, 目的汎関数や制約汎関数は境界値問題の解で記述された汎関数や領域の大きさなどで与えられる. この問題の領域変動に対する勾配(形状勾配と呼ばれる)は変分法の手続きによって形式的に導出できる.

しかしながら, 形状勾配を有限要素法などで数値的に評価して, それに比例した境界移動を行う方法では, 境界の滑らかさを保持できないことが知られている. この課題を克服するために, 形状勾配を境界力 (Neumann 条件) とする線形弾性変形問題の解を用いて領域変動を行う方法が提案され, 力法 (traction method) と呼ばれてきた^[1].

この方法は, 境界形状の滑らかさを保つことに関しては優れていた. しかしながら, 境界全体が変動するような問題に対しては, 剛体変形の不定性によって適用できないことが問題であった. 剛体変形が拘束されていても, 領域変動の拘束が緩い問題, 例えば, フレーム状の構造, に対しては収束解が得られない場合があった.

本稿では, 力法の勾配法としての原理を再確認し, Neumann 条件を Robin 条件に変更することによって従来の問題が克服できることを示す. 最後に, 従来の方法よりも良好な収束解が得られた例を紹介する.

2. 形状最適化問題

領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$), その境界 Γ , の微小変動は写像の 1 媒介変数族 $T_s : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < \epsilon$ (ϵ は小さな正の実数) で表現できる. ただし, Ω の位相を変えないために次の条件を仮定する^[2].

- (i) T_s と T_s^{-1} はすべての $s \in [0, \epsilon)$ に対して $(C^1(\mathbb{R}^n))^n$ あるいは $(W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))^n$ に属する.
- (ii) 写像 $s \mapsto T_s(x)$ と $s \mapsto T_s^{-1}(x)$ はすべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $(C^1([0, \epsilon)))^n$ に属する.

また, 次式で定義される s に対する T_s の導関数 V を速度と呼ぶ.

$$V(x) = \frac{\partial T_s}{\partial s}(T_s^{-1}(x)) \quad x \in \Omega_s \quad (1)$$

例えば, 2 階楕円型偏微分方程式の境界値問題に対する目的汎関数 $J_0(\Omega; u)$ と制約汎関数 $J_i(\Omega; u)$ ($i =$

$1, 2, \dots, q$) の境界変動型形状最適化問題は次のような領域 $\Omega^* \subset \mathbb{R}^n$ を見つける問題として記述できる.

$$\begin{aligned} J_0(\Omega^*; u) &= \min_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} J_0(\Omega; u) \quad \text{such that} \\ a(\Omega; u, v) &= l(\Omega; v) \quad u - h \in U \quad h \in U_h \quad \forall v \in U \\ J_i(\Omega; u) - J_i^{[0]} &\leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q) \end{aligned} \quad (2)$$

ただし, 双 1 次形式 $a(\Omega; \cdot, \cdot)$ と 1 次形式 $l(\Omega; \cdot)$ は次式のように定義する.

$$a(\Omega; u, v) \equiv \int_{\Omega} (\nabla u \cdot A \nabla v + a_0 uv) dx, \quad (3)$$

$$l(\Omega; v) \equiv \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma \setminus \bar{\Gamma}_0} g v d\Gamma \quad (4)$$

A, a_0, f, g, h は既定関数, $J_i^{[0]}$ ($i = 1, 2, \dots, q$) は実定数である. $U = \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\Gamma_0} = 0\}$ である.

簡単のために, A, a_0, f, g, h は領域変動に伴って変化しないと仮定して, 部分境界の境界 $\bar{\Gamma}_0 \cap \Gamma \setminus \bar{\Gamma}_0$ や Γ 上の特異点は変動しないと仮定して, 随伴法と領域変動に対する物質導関数の公式を用いれば, 目的汎関数の s に対する物質導関数 \dot{J}_0 は速度 V の 1 次形式 $\langle \Omega; G\nu, V \rangle$ で与えられる.

$$\dot{J}_0(\Omega; u) = \langle \Gamma; G\nu, V \rangle \equiv \int_{\Gamma} G\nu \cdot V d\Gamma \quad (5)$$

ただし, ν は単位外向き法線である. G の具体的な記述は文献^[1]に譲る. ここで, $G\nu$ は形状勾配, G は形状勾配密度と呼ばれる.

3. 勾配法

勾配法は Hilbert 空間において定義される^[3]. ここでは, その拡張を考える.

ベクトル空間 X 上の汎関数 $J_X : X \mapsto \mathbb{R}$ を最小にする $x^* \in X$ を求める問題を考える.

$$J_X(x^*) = \min_{x \in X} J_X(x) \quad (6)$$

J_X の $x \in X$ における勾配は, 任意の $h \in X$ に対して次式の汎関数 $dJ_X(x, h) : h \in X \mapsto dJ_X(x, h) \in \mathbb{R}$ が有界線形のとき微分可能と呼び, そのときの $G_{J_X} \in X'$ を勾配と定義する. ただし, X' は X の双対空間である.

$$\begin{aligned} dJ_X(x, h) &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{\zeta} (J_X(x + \zeta h) - J_X(x)) \\ &= (G_{J_X}, h)_{X' \times X} \quad \forall h \in X \end{aligned} \quad (7)$$

勾配法では, Hilbert 空間 Y , ノルム $\|\cdot\|_Y$, 上で定義された次式を満たす一様有界で強圧的な双 1 次形式 $b_Y(\cdot, \cdot)$ を用意する.

$$\begin{aligned} \exists \alpha, \beta > 0 : b_Y(y, y) &\geq \alpha \|y\|_Y^2 \\ \text{and } b_Y(y, z) &\leq \beta \|y\|_Y \|z\|_Y \quad \forall y, z \in Y \end{aligned} \quad (8)$$

勾配法は, J_X の勾配 $G_{J_X} \in X'$ を評価して, 次式で $y \in X \cap Y$ を解き, x を y の方向に移動していくことによって, 最適解 x^* を見つける方法と定義する.

$$b_Y(y, h) = -(G_{J_X}, h)_{X' \times X} \quad \forall h \in X \cap Y \quad (9)$$

実際, ζ を小さな正定数として, ζy が汎関数を減少させることは次のように保証される.

$$\begin{aligned} J_X(x + \zeta y) &= J_X(x) + (G_{J_X}, \zeta y)_{X' \times X} + o(\zeta) \\ &= J_X(x) - b_Y(y, \zeta y) + o(\zeta) \\ &\leq J_X(x) - \alpha \zeta \|y\|^2 + o(\zeta) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで, 不等式の右辺第 2 項は負値で, 第 3 項は ζ を小さくすることによって十分小さくできる.

4. 従来の力法

力法は, 速度 $V \in D$ を次式の境界値問題の解として解析する方法として提案されてきた^[1].

$$a_n(\Omega; V, y) = -\langle \Gamma; G\nu, y \rangle \quad \forall y \in D \quad (11)$$

ただし,

$$a_n(\Omega; V, y) \equiv \int_{\Omega} C_{ijkl} V_{k,l} y_{i,j} dx \quad (12)$$

$$D \equiv \{V \in (W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))^n \mid \text{形状拘束条件}\} \quad (13)$$

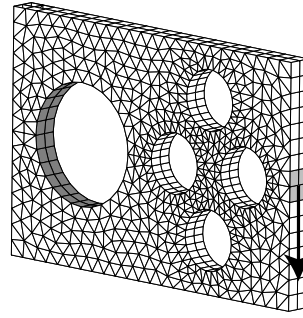
$C_{ijkl} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($i, j, k, l = 1, 2, \dots, n$) は楕円性を有した線形弾性体の剛性である. なお, 総和規約と偏微分表記法 $(\cdot)_{,i} \equiv \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用した. この方法は, Hilbert 空間 $(H^1(\mathbb{R}^n))^n \equiv (W^{1,2}(\mathbb{R}^n))^n$ の双 1 次形式 $a_n(\Omega; \cdot, \cdot)$ を用いた勾配法になっていた. 一様有界性と強圧性は剛体変形を拘束する形状拘束条件を設定することによって保たれる.

5. 提案する力法

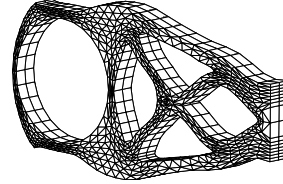
本稿では, 一様有界で強圧的な別の双 1 次形式 $a_n(\Omega; \cdot, \cdot) + \alpha \langle \Gamma; \cdot, \cdot \rangle$ を用いることを提案する. ただし, $\alpha > 0$ とする. 双 1 次形式 $\langle \Gamma; \cdot, \cdot \rangle$ は式 (5) によって定義する. このとき, 速度 $V \in D$ は次式の境界値問題の解として得られる.

$$a_n(\Omega; V, y) + \alpha \langle \Gamma; (V \cdot \nu)\nu, y \rangle = -\langle \Gamma; G\nu, y \rangle \quad \forall y \in D \quad (14)$$

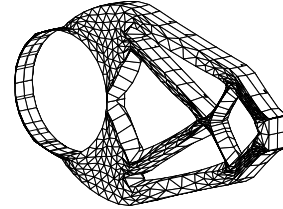
従来の方法では $G\nu$ を Neumann 条件として導入していたのに対して, 提案する方法では Robin 条件として導入した. 剛体変形の形状拘束がなくても $\alpha > 0$ のときこの境界値問題の解は一つ存在する. なお, 線形弾性変形問題の Robin 条件は境界の法線方向に剛性 α の分布ばねを追加することに相当する.



(a) Initial shape and boundary conditions



(b) Final shape by TM with Neumann condition



(c) Final shape by TM with Robin condition

Fig. 1 Results of mean compliance minimization problem on a linear elastic continuum of the Michell truss type

6. 解析例

図 1 は, Michell トラス型境界条件に対する線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題に力法を適用した結果を示す. 体積を初期形状の 30.0% に制限した下で, 平均コンプライアンスは Neumann 条件の力法では 317.2% であったのに対して, Robin 条件の力法では 215.4% まで減少した. なお, Robin 条件の α の大きさは, $a_n(\Omega; V, V)$ と $\alpha \langle \Gamma; (V \cdot \nu)\nu, V \rangle$ の剛性マトリックスにおいて, 設計境界上節点に対する対角要素の平均値が一致するように与えた.

参考文献

- [1] 畔上秀幸. 形状最適化問題の解法. 応用数理, Vol. 11, No. 3, pp. 49–52, 2001.
- [2] J. Sokolowski and J. P. Zolésio. *Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [3] Cea J. Numerical methods of shape optimal design. In E. J. Haug and J. Cea, editors, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, Vol. 2, pp. 1049–1088. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1981.