形状最適化問題の解法

畔上秀幸

1.　はじめに

「最適はつまらない (boring) 。」ミシガン大学の John E. Taylor 先生が大学院の講義「最適構造設計」の冒頭でつぶやかれたことばである。１９９１年秋から翌年夏まで文部省在外研究員として同大学に滞在した折に拝聴する機会を得た。髪はぼさぼさ、延ばし放題の髭、どういう訳か片側だけ捲り上げられたジーンズ（日によって左右まちまち）は最適を語る人とは思えない容姿であった。３部材トラスの各部材断面積を設計変数にして、与えられた外力に対して許容応力条件を満たす質量が最小となる断面積を求めよ。その最適解は１つ存在して、自動的に決まってしまう。つまらないという意味はそんなところから来ていたように思われる。

一方、自然界に目を向ければいろいろな形が存在する。図 1 は文献 [1] から引用した鮪の写真である。いかにも抵抗の少なそうな形に思える。図 2 は同じく文献 [1] から引用したブラウンペリカンの上腕骨の断面写真である。中空で、しかも軸方向に対して 45 ° の傾きをもった補強材が配置されたような形態は力学的に優れていることは明らかである。

それに較べて、人間の作り出してきた機械や建築物の多くは角張っていて直線や平面的である。これらの直線や平面を移動しただけではつまらない結果に落ち込むのが関の山である。 Taylor 先生はその解決策を設計変数の選び方に求めた。有限個の寸法（ベクトル）を設計変数にするのではなく、形状を表す関数を設計変関数に選ぶアプローチである。講義では一貫して、軸方向に分布した任意の軸力が作用した棒の断面積分布を設計変関数とした最大応力最小化問題や最適補強問題などについて延々と詳述されたのであった。

本稿では、編集委員の吉村忍先生からいただいた、形状最適化問題について「すべての項目を取り上げるのではなく、いくつかの重要項目に絞って、それぞれの本質を分かり易く解説いただく」とのご依頼に沿って、自然界の形にも迫れるとの期待を込めて、形状変動を関数で記述した分布系最適化問題の解法について紹介したい。

通常、形と言えばいろいろなことが連想されて、極めてあいまいなものになる。ここでは工学で扱われるところの固体や流れ場、電磁場などの幾何学的形状を意味するものとする。取り敢えずは、線形弾性体あるいは粘性流体や理想流体の流れ場などの境界値問題が定義された領域の幾何学的形状を設計対象にする。目的汎関数には、外力仕事（平均コンプライアンス）、固有振動数あるいは粘性による散逸エネルギーや規定圧力分布との２乗誤差などを念頭に置く。

領域の幾何学的形状といっても、問題の与え方によって作り出せる形状が異なってくる。そこがこの分布系形状最適化問題の楽しいところである。現在まで盛んに研究されてきた形状最適化問題は位相を固定した下で境界が変動する問題と領域を固定した下で位相が変動する問題である。図 3 は、境界変動型の形状最適化問題として解かれた Stokes 流れ場の中に置かれた静止孤立物体の抗力最小化形状である [2]。図 4 は、位相変動型の形態最適化問題として解かれた２次元３点曲げ平板の剛性最大化形態である [3]。図 1 や 2 と比較するとまだまだ見劣りする結果ではあるが、今後の計算工学の発展を考えれば、設計や形状に関する研究に役立つことが期待される。本稿では、境界変動型と位相変動型に分けてそれぞれの発展の経緯を著者の知る限りにおいて解説する。

2.　境界変動型問題

最初に位相を固定した境界変動型形状最適化問題について紹介する。

2·1　変分問題の一つ　この問題に関する研究の起源を探ると、1908 年に変分法を体系化したと言われるフランスの Hadamard[4] がその多大な業績の一端として、薄膜の基本振動数の最大化問題を解いていたことを挙げることができる。Hadamard は滑らかな（角のない）境界を仮定して、境界が法線方向に移動したときの移動量によって境界の変動（摂動、変分）を表現した。したがって、この場合の設計変数は、境界を定義域とした移動量を表すスカラーの分布関数ということになる。

簡単な Dirichlet 問題を例に挙げれば、境界変動型問題は次のように表すことができる。n 次元空間の領域

Fig. 1　鮪 [1]

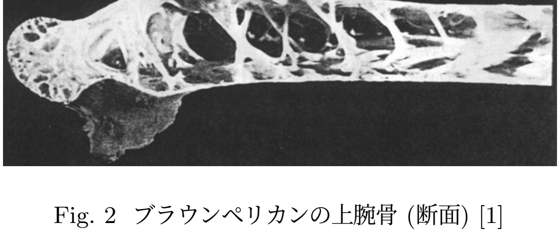

Fig. 2　ブラウンペリカンの上腕骨 (断面) [1]

$\Omega \subset \mathrm{R}^n$、$n=2,3$、その境界 Γ、においてスカラー関数 f が与えられてスカラー関数 u を解く境界値問題：

$$-\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u(\vec{x}) = f(\vec{x}),\ \vec{x}\in\Omega, \tag{1}$$

$$u(\vec{x}) = 0,\ \vec{x}\in\Gamma, \tag{2}$$

が定義されているとき、目的汎関数 J ：

$$J(\Omega) \quad = \quad \int_{\Omega} F(\vec{x}, u(\vec{x}))\, dx \tag{3}$$

が最小となる境界形状を求めよ。必要があれば、さらに制約条件が加えられる。詳細な式の展開は省略するが、図 5 に示すように、微小な（時間のような）増分 δs に対して、境界が法線方向に $v_n(\vec{x})\delta s$ だけ変動（摂動、変分）した場合の目的汎関数の第 1 変分 δJ は次の形式で得られる。

$$\delta J \quad = \quad \int_{\Gamma} G(\vec{x}) v_n(\vec{x}) \delta s\, d\Gamma \tag{4}$$

ここで、G は $v_n \delta s$ に対する感度関数で、通常、状態関数 u と随伴関数 v の関数となる。随伴関数 v は次の境界値問題の解として得られる。

$$-\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}v(\vec{x}) = \frac{\partial F}{\partial u}(\vec{x}),\ \vec{x}\in\Omega, \tag{5}$$

$$v(\vec{x}) = 0,\ \vec{x}\in\Gamma, \tag{6}$$

領域 Ω が最適であるための必要条件は任意の変動 v_n に対して式 (4) が零となる条件として与えられる。

その後 1948 年、Polya[5] は、 StVenant[6] が 1856 年に予想した通り、ねじり剛性が最大となる棒の断面形状は円であることを同様の理論で示した。1969 年、Horák[7] は逆変分原理と称して、境界が法線方向に移動した場合の線形弾性問題の形状最適化理論をまとめている。流れ場の形状最適化問題は Pironneau[8]$^-$[10] によって 1970 年代前半にまとめられた。Pironneau の研究の背景には、Lions[11] を中心としたフランスの応用数学者らによる分布系の最適制御理論の研究があったと言われている。Banichuk[12]$^-$[14] は旧ソビエトにあって同様の理論を独自に体系化した。

境界形状の滑らかさを必要としない理論は Cea[15][16] と Zolésio[17][18] によって始められた。彼らは領域の変動を境界の移動ではなく、領域全体で定義された写像（ベクトル関数）によって表現する方法を提案した。その写像を $\vec{T}_s$ で表現すれば、次のようになる。

$$\vec{T}_s(\Omega) \quad : \quad \Omega \ni \vec{X} \mapsto \vec{x} \in \Omega_s,$$
$$s \geq 0, \vec{T}_0(\Omega) = \Omega \tag{7}$$

Fig. 3　Stokes 流れ場に置かれた孤立物体の抗力最小化形状 [2]

図 6 に示すような微小増分 δs に対する変動を考えれば、連続体力学でよく使われる物質導関数の公式が適用できて、式 (4) に相当する目的汎関数の第 1 変分 δJ は次の形式で得られる。

$$\delta J \quad = \quad \int_{\Gamma} \vec{G}(\vec{x})\cdot\vec{V}(\vec{x})\delta s\, d\Gamma \tag{8}$$

ただし、$\vec{V}(\vec{x})$ は次式で定義される。

$$\vec{V}(\Omega_s) = \frac{\partial \vec{T}_s}{\partial s}(\vec{T}_s^{-1}(\Omega_s)) \tag{9}$$

$\vec{T}_s^{-1}$ は $\vec{T}_s$ の逆写像を表す。ここで、$\vec{V}$ の意味を考えてみよう。弾性体の変形も考えてみれば一種の写像である。この変形を表すのに物質固定 (Lagrange) 座標系表示と空間固定 (Euler) 座標系表示があることを思い起こせば、 $\vec{T}_s$ は物質固定座標系表示に従っていると考えることができる。それに対して、δs を微小時間増分と考えれば、 $\vec{V}$ は空間固定座標系で表した速度の概念と一致する。 Zolésio は $\vec{V}$ を速度（speed）と呼んだ（speed は本来速度ベクトルの大きさを表すことばで、速度ベクトルの意味を持たせるためには velocity が適切であると思われる）。したがって、写像を用いた領域変動の記述法を用いれば、弾性体が角を有していても変形は難無く記述できるように、境界形状の滑らかさは不要となる。さらに、速度と時間増分の積 $\vec{V}\delta s$ は領域の微小変動を与えることを考えれば、その係数関数 $\vec{G}$ はその領域変動に対する感度関数に相当する。 Zolésio は形状勾配関数 (shape gradient function) と呼んだ。それに対して、滑らかな境界を仮定すれば、スカラーの感度関数 G は、形状勾配関数 $\vec{G}$ と $\vec{G} = G\vec{n}$ の関係が成立することから、形状勾配の密度 (density) と呼んだ。形状勾配関数の詳しい導出過程は Pironneau[10] や Sokolowski and Zolésio[19] のモノグラフに詳しくまとめられている。

2·2　感度解析の厳密化　Cea と Zolesio によるこのアイディアは 1980 年にアメリカの Iowa City で開催された NATO Advanced Study Institute の会議で発表された。それを機に、アメリカの工学者はヨーロッパ（特に、フランス）で開発された厳密な感度の解析理論を手に入れることになった。アメリカの Choi and Haug[20]、Choi[21]、Arora and Cardoso[22]、Arora[23] は、弾性力学における基本的な形状最適化問題の感度解析にこの理論を適用した。その成果の多くは Haug, Choi and Komkov[24] のモノグラフにまとめられている。

1980 年の会議を契機として、境界変動型形状最適化問題の感度解析は、写像による理論を拠り所として、より厳密になった。しかしながら、それらの理論を適用した解析対象は、依然として有限個の寸法で表された

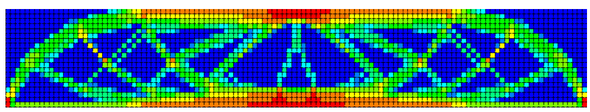

Fig. 4　2 次元 3 点曲げ問題の剛性最大化形態 [3]

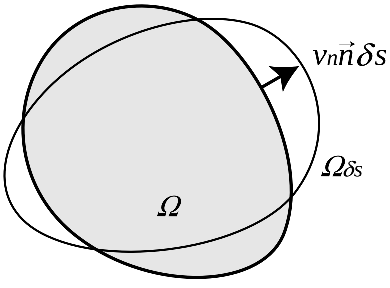

Fig. 5 滑らかな境界の境界変動型問題

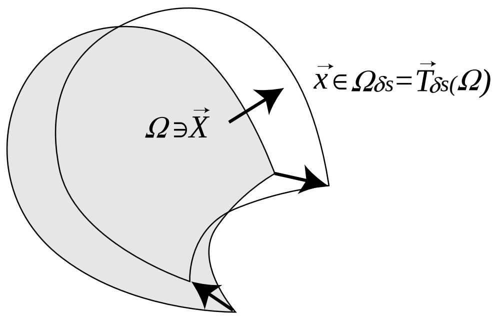

Fig. 6 区分的に滑らかな境界の境界変動型問題

形状であった。Choi and Seong[25]、Haug, Choi and Komkov[24] は、はりで補強された板構造やコンロッドの形状最適化問題を有限個の設計変数（寸法）で表現して、有限個の変数（ベクトル）に対する数理計画問題として定式化し、 OR (operations research) の研究者らによって開発された最適化プログラムを利用することによってその問題を解いた。Pironneau[10] は分布系の理論を展開した後で、有限要素モデルを基にした離散系（有限自由度系）の理論を再度展開している。実際の最適化解析には数理計画法に基いた最適化プログラムが利用可能とした。

このように構造の幾何学的形状を有限個の設計変数で表して、数理計画問題として解析するアプローチは、感度の評価方法を問題にしなければ、実は、さらに歴史を遡ることができる。 1960 年に Schmit[26] が先に挙げた３部材不静定トラスの問題を有限要素法解析と非線形計画法を利用して解いた。彼は感度を差分で評価した。有限要素モデルの境界節点座標を設計変数に選んだ形状最適化問題は、1973 年に Zienkiewicz and Cambell[27] が試みた。彼らは、ダム形状の応力制約下の重量最小化問題をその方法で定式化し、数理計画法の一つである逐次線形計画法で解析した。彼らも感度を差分で評価した。有限要素法の近似理論によって得られるマトリックス形式の状態方程式から出発した感度解析の理論は、 Fox and Kapoor[28] が振動固有値と固有振動ベクトルの感度を対象にした理論を発表したことが契機となって発展した。

2·3 波打ち現象 感度解析の理論が明らかになって、境界変動型形状最適化問題は決着したかに思われた。しかし、感度が正確に評価できても、この問題には別の難しさがあることがしだいに分かってきた。Imam[29] は、1982 年に、有限要素モデルの境界上節点座標を設計変数に選ぶことの問題点について重要な指摘を行った。当然、大規模な問題は解けないことや、内部のメッシュをゆがみなく再構築する工夫が必要であることのほかに、本質的な問題として、節点座標を設計変数に選ぶと形状が波打ってくる現象が観察されることを指摘した。彼は、その原因には立ち入らずに、形状を記述する自由度を有限要素モデルの自由度よりも制限することが必要であると主張した。その解決策として３つの方法を提案した。一つは、節点を間引いて設計変数に選び、間引いた節点の座標は補間する方法 (design element method)、二つめは、外形形状を多項式で表現し、その係数を設計変数に選ぶ方法 (super curve method) 、三つめは、基本変形モードの線形和で形状変化を表現し、線形和の係数を設計変数に選ぶ方法である。

波打ち現象の存在は、数学者による形状最適化問題に関するモノグラフにおいても紹介されている。Haslinger and Neittaanmaki[30][31] は形状最適化問題の定式化において境界値問題が成立するための最も基本的な条件である Lipschitz 条件（傾きが定義できないほど波打たないこと）を制約条件に加えている。数値例として、簡単な軸方向に一定の軸力が作用した棒の断面積分布を設計変関数とした応力制約付外力仕事最小化問題に対する結果を紹介している。その結果は、断面積分布の傾きに制約を設けないと不合理な波打ち形状が得られるが、制約を設けることで合理的なテーパ形状が得られることを示している。

2·4 自由度の制限 Imam の指摘を契機に境界変動型形状最適化問題の数値解法に関する研究は形状の自由度を制限する方向に向かった。 Braibant and Fleury[32][33] は、波打ち現象を指摘した上で、形状を B-スプライン曲線や Bezier 曲線で与えた場合に収束形状が得られることを示した。領域内部のメッシュはアイソパラメトリック写像を用いて求められている。Yang and Choi [34] は、感度の精度はスプライン表現の方が折れ線表現よりも良いことを示した。また、それに関連した話題として、形状変動に伴う有限要素モデルの変更を自動化するために、自動メッシュ機能やアダプティブメッシュ機能を利用する試みが Benett and Botkin [35] や Bennett[36] によって始められた。Kikuchi, Chung, Torigaki and Taylor[37] はアダプティブ有限要素法の適用はある程度の波打ち防止効果を生むことを紹介している。

一方、Belegundu [38] は形状変動を基本変形モードの線形和で与える方法に注目し、基本変形モードを線形弾性体の変位モードで与える方法 (natural approach) を提案した。この場合の変位モードは、変動境界上で位置を違えて単位荷重あるいは単位強制変位を作用させた場合の有限個の変位場を解析することによって得る。感度は、写像による理論から導出される境界積分式 (8) を領域積分に置き換えた式に基づいて評価する方法 (domain method)[24] が使われた。境界の滑らかさが問題になる場合は表面にはり要素を付加することで対処できるとした。Raasch [39] も同様の提案を行い、MSC/NASTRAN に採用された。Vanderplaats[40]、Vanderplaats and Miura[41] は基本変形モードを設計者が任意に与える方法を実用化し、GENESIS として商品化した。これらのアイディアに対して、Hou and Sheen[42] は基本変形モードの選び方が最適の度合を左右することを指摘している。

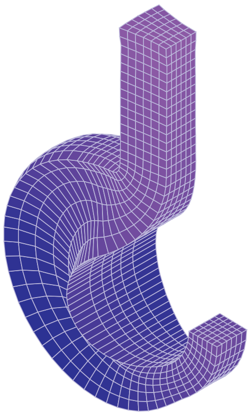

Fig. 7 剛性最大のフック

2·5 自由度の解放 Imam の指摘以降、自由度は制限する方向に向かった。しかし、1990 年代に入って有限要素モデルと同一の自由度まで解放できる可能性が示された。1993 年に、著者 [43] は、楕円型偏微分方程式の境界値問題を対象とした境界変動型領域形状最適化問題の解法を提案した。その解法は、境界値問題が定義されている領域を線形弾性体とみなして、形状変動に関する拘束条件の下で、形状勾配関数（通常、境界上で定義され、法線方向のベクトル関数として得られる）に負号を付けた値を表面力として作用させたときの変位場を速度場（領域の変動方向）として解析する方法である。この方法は、その解析方法と線形弾性問題の類似性から力法 (traction method) と呼んだ。実際の解析では、この速度場に微小変形理論が有効な範囲内でできるだけ大きな定数（通常、最大ひずみが数% から 10% 程度となるような定数）を掛けたものを使って領域形状を更新し、感度を評価し直しながらこの過程を繰り返すことになる。本来の境界値問題や速度場の解析には有限要素法や境界要素法が適用できる。入出力ファイルを適切に書き換えるプログラムを作成すれば汎用のアプリケーションを利用できることが最大の利点である [44]。図 7 は、汎用アプリケーションの利用による解析例である。

この力法は、現在まで、線形弾性問題 [45]、振動固有値移動問題 [46] や周波数応答問題 [47]、応力分布規定問題 [48]、変位規定問題 [49]、最大変位および最大応力最小化問題 [50]、さらに、粘性流れ場の散逸エネルギー最小化問題 [2][51]、ポテンシャル流れ場の流速規定問題 [52] にも適用されている。

この方法によって得られる形状には Imam が指摘したような波打ち現象は現われなかった。

2·6 波打ち現象の原因と克服 波打ち現象が現われることの数理的な説明は、最近になって著者ら [53] によって示された。これまで知られてきた楕円型偏微分方程式の境界値問題に関する正則性の定理を用いれば、工学で通常扱われる形状最適化問題の形状勾配関数の滑らかさ（連続である導関数の最も大きな階数）は、仮定した境界の滑らかさよりも常に劣るという関係を得ることができる。この関係は、扱う問題の形状勾配関数を直接用いて境界を強制変位のように移動していく（著者らは直接勾配法と呼んだ）と滑らかさが失われていく（波打つ）ことを意味する。さらに、著者らはその形状勾配関数と形状変動の関係を楕円型偏微分方程式の境界値問題と関連付けて、形状勾配関数を Neumann 条件として楕円型偏微分方程式を解けば（平滑化勾配法）、初期形状と同一の滑らかさに保持できることを示した。その境界値問題として線形弾性問題を適用した方法が著者らが提案してきた力法であった。

この関係を理論の拠り所に据えれば、工学で扱われる境界変動型形状最適化問題の多くは平滑化勾配法（力法）を適用することによって解決できるのではないかと思われる。

3. 位相変動型問題

今度は、領域の境界を固定して位相が変動する形状最適化問題について紹介する。ただし、ここでは位相を直接設計変数にするのではなく、楕円型偏微分方程式の定義されている領域を固定して、楕円型偏微分方程式の係数関数を設計変関数にする形状（あるいは形態）最適化問題を考える。式 (1), 2 の Dirichlet 問題を考える場合には、弱形式:

$$\int_{\Omega} \chi(\vec{x})(\vec{\nabla} u(\vec{x})) \cdot (\vec{\nabla} v(\vec{x}))\, dx = \int_{\Omega} \chi(\vec{x}) f(\vec{x}) v(\vec{x})\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{10}$$

における χ を設計変関数にするアプローチである。したがって、位相は係数関数 χ が零になる部分領域が現れたときに変化することになる。

3·1 0-1 計画問題 この問題を領域に穴を空けていく問題、あるいは、領域を定義する物質の最適配置問題と捉えて、素朴に考えれば、細分化（要素化）した小領域（要素）ごとに、それを取り去る (0) か残す (1) かの選択問題（計画問題）として定式化することができる。1973 年に Maier[54] は線形弾性体の最適形状問題を有限要素法解析で用いられる有限要素を単位とした 0-1 計画問題として定式化し、その数値解法を示した。Zavelani, Maier and Binda[55] は塑性問題に適用した。日本では、大河内ら [56][57] が同様の方法を提案した。この定式化に基いた商用プログラムは Atrek[58] によって NISA-SHAPE として開発された。

3·2 解の存在 領域を有限個の要素に分割して、0-1 の最適な組み合わせを求める問題は、分割数の増加に伴って組み合わせ数が急激に増加することから、厳密な最適解を得ることが困難になる。さらに、このアイディアを分布関数を用いて定式化した場合には解の存在が保証されないという本質的な問題に直面する。この場合、設計変関数 χ は、物質が配置されている部分領域を $\Omega_{(1)}$ とすると次のように与えられることになる。

$$\chi(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & (\vec{x} \in \Omega_{(1)}) \\ 0 & (\vec{x} \in \Omega_{(0)} = \Omega \setminus \Omega_{(1)}) \end{cases} \tag{11}$$

この問題の解が存在しないこと（不正則性）は、1970 年代後半から 1980 年代にかけて Murat[59][60] らが議論した [61]。

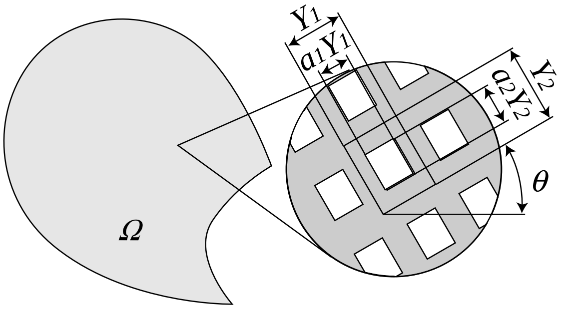

Fig. 8 矩形の穴を持つミクロ構造

3·3 板厚分布問題 数学における一連の研究とは別に、構造解析の分野においても 1970 年代後半から 1980 年代にかけて 0-1 問題の不正則性に関連した重要な指摘が行われていた。Olhoff[62][63] は板厚分布を設計対象にした基本固有振動数最大化問題や面外荷重を受ける板の平均コンプライアンス最小化問題を解析した結果、滑らかさを仮定して得られた最適板厚分布よりも、リブで補強した不連続な板厚分布の方が明らかに優れていることを指摘した。さらに、Cheng and Olhoff[64][65] は板厚分布を有限要素ごとに違えた場合の最適板厚分布は要素の分割に強く依存することを示し、収束解が得られないことを指摘した。菊池 [66] はこの理由を丁寧に解説している。

3·4 均質化法 0-1 計画問題は不正則であることが示された後、それを正則化できる可能性も示された。1970 年代から研究が始められた楕円型偏微分方程式の境界値問題において、係数関数の許容集合を均質化されたマクロ特性を持つような微細構造を有した関数まで拡張できる理論（均質化法）が示された。それに基いて、Lurie, Cherkaev and Fedorov[67] は、1982 年に、形状最適化問題に均質化理論を導入することを試みた。多孔質や微細なリブなどのミクロ構造を許容したより厳密な形状最適化問題の理論は Kohn and Strang[68][69] によってまとめられた。

3·5 ランク２材料 ミクロ構造を許容した係数関数を設計変関数にした形状最適化問題が成立することが示された後、1987 年に Avellaneda[70] が重要な理論を報告した。平面弾性問題において、２つの材料からなるミクロ構造で最も剛性が高い形態は、櫛のような形態（ミクロのレベルが異なる２つの層状構造が直交したミクロ形態）で２つの材料を分けた、ランク２材料 (rank-2 material) と呼ばれる構造であるという理論である。２つの材料の内、一つの材料を極端に剛性のない材料と仮定すれば（完全に零にすると 0-1 計画問題の不正則性が現れる）材料の最適配置問題と考えることができる。このミクロ構造を許せば、剛性が最大となる平面弾性体の形態とは、直交する２つの主応力方向に層を持ったランク２材料からなる形態であることになる。このランク２材料の２つの層の密度分布を設計変関数にした場合、２次元弾性問題の板厚分布と同様に、密度と剛性の関係が比例関係になる。そのために、最適化を行っても、２つの材料が場所によって適切な割合で混ざり合った状態で剛性の機能が有効に発揮されるために、平坦な（位相が変化しない）分布しか得られない。Bendsoe[71] はその解析例を示している。ランク２材料は、制作が困難であるばかりでなく、境界条件を変化させると急激に弱くなるガラス細工のような構造であると考えられる。

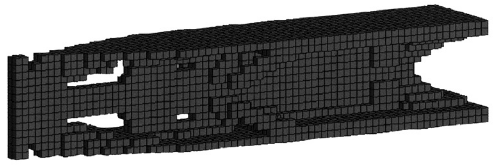

Fig. 9 剛性最大の３次元片持ちはり ((株) くいんと 提供)

3·6 形態最適化解析 厳密な意味では、ランク２材料が最適であっても、位相（構造の形態）を創生するという目的には適していない。位相創生のためには、中間の密度が不利になるような問題を考える必要がある。その問題の定式化は Bendsøe and Kikuchi[72] によって 1988 年に示された。彼らは、図 8 に示すような、矩形の穴を持つミクロ構造を仮定し、その穴の大きさを与えるパラメータ a_1, a_2 と穴の回転角 θ を設計変関数とした最適化問題を定式化し、有限要素法解析の有限要素ごとにその設計変関数を離散化した問題を解いた。式 (3) を目的汎関数にした場合、ミクロ構造パラメータの変動（摂動、変分） $\delta a_1, \delta a_2, \delta\theta$ に対する目的汎関数の第１変分 δJ は次の形式で得られる。

$$\delta J \;=\; \int_\Omega (G_{a_1}\delta a_1 + G_{a_2}\delta a_2 + G_\theta \delta\theta)\, dx \quad (12)$$

ここで、$G_{a_1}, G_{a_2}, G_\theta$ はミクロ構造パラメータに対する感度関数である。彼らは、ミクロ構造パラメータ a_1, a_2, θ からマクロ係数関数（線形弾性問題では剛性テンソル）を評価する方法には均質化法に基く有限要素法解析 [73] を適用した。また、最適解は式 (12) の感度関数が零になる条件を利用した方法（最適性規準法）が使われた。この方法は商用プログラム OPTISHAPE で採用されている。図 9 は、それによる解析例である。

形態最適化問題の解法は、これまで、３次元線形弾性問題 [74]、振動固有値移動問題 [75] や周波数応答問題 [76] 等に適用されている。最近では、弾性変形を利用した機構 (compliant mechanism) の創生問題 [77] にも適用されている。

また、有限要素法を用いた形態最適化解析においてチェッカーボードパターンが現れることが知られてきたが、材料の自由度を状態関数（線形弾性問題の場合は変位）の自由度よりも少なくすることで防止できることが数値解析の誤差理論を用いて示された [78]。

Bendsøe and Kikuchi の解析方法では、ミクロ構造とマクロ材料特性を均質化法によって関連付けていたために、完全に穴が空いた場合と塞がった場合のみではなく中間の状態においても対応するミクロ構造が実在した。しかし、この定式化を緩めて、剛性と密度の関係を人工的に与える方法も試みられている [71][79]。この場合、剛性が密度に対して下に凸の関数で与えることが重要な意味を持つ。

さらに、最近では、ミクロ構造に対する位相最適化問題の解法も試みられている。Sigmund[80] はマクロ特性を規定したミクロ構造 (microstructure) の創生問題を定式化し、その解法を示した。

3·7 最適分布リブ形態 一方、均質化法に基いたアプローチとは別に、微細なリブが連続的に分布することを仮定した分布リブの最適配置問題も研究されてきた。そのアイディアの起源は、 Prager and Tayler[81] および Prager[82] が提唱した、最適性の条件を用いて構造を決定する方法（最適性規準法, optimality criteria method）である。その後、Venkayya and Khot[83]、Khot, Venkayya and Berke[84] は、剛性、変位制約、動剛性、強度を目的関数にした寸法最適化問題にこの方法を適用した。1979 年には、Fleury[85] が双対理論を用いて通常の数理計画問題の解と最適性規準法の解が（解の一意性が保証されている問題において）一致することを示した。これらの成果を踏まえて、1989 年に Rozvany[86] は分布リブの最適配置問題を定式化し、分布系の最適性規準法 (continuum-type optimality criteria method) を示した。この方法を用いた解析結果は Zhou and Rozvany[87]、Rozvany and Zhou[88] によって示されている。

4. おわりに

これまで概観してきたように、形状を分布関数で定義した形状最適化問題は、数学と密接な関連を持って発展してきた。その様子は、数学者が保証人になって、計算工学者が夢の実現に向かって冒険を繰り返してきた歴史のように思えてくる。そんな雰囲気をわずかでもお伝えできたならば幸である。

参考文献

(1) Hertel, H. : *Structure · Form · Movement*, English Language Edition, Reinhold Publishing Corporation, New York, (1966).

(2) 片峯英次, 畔上秀幸 : 粘性流れ場の領域最適化問題の解法 (力法によるアプローチ), 日本機械学会論文集, B 編, 60 巻, (1994), pp. 2312-2318.

(3) 畔上秀幸, 石原央之 : 汎用 FEM コードを利用した形態最適化解析, 日本機械学会講演論文集, No. 953-2, (1995), pp. 69-70.

(4) Hadamard, J. : Mémoire sur un probléme d'analyse relatif a l'équilibre des plaques élastiques encastrees, Mémoire des savants etragers, Oeuvres de J. Hadamard, CNRS, Paris, (1968).

(5) Polya, G. : Torsion rigidity, principal frequency, electrostatic capacity and symmetrization, *Quarterly Appli. Math.*, **6**, (1948), pp. 267-277.

(6) Sant-Venant, B. : *Mémoire*, XIV, L'Académie des Sciences, Paris, (1856), p. 233.

(7) Horák, V. : *Inverse Variational Principles of Continuum Mechanics*, Rozpravy Ceskoslovenske Akad. Ved., (1969).

(8) Pironneau, O. : On optimum profiles in Stokes flow, *J. Fluid Mech.*, **59**, Part 1, (1973), pp. 117-128.

(9) Pironneau, O. : On optimum design in fluid mechanics, *J. Fluid Mech.*, **64**, Part 1, (1974), pp. 97-110.

(10) Pironneau, O. : *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*, Springer-Verlag, New York, (1984).

(11) Lions, J. L. : On the optimal control of distributed parameter systems, *Proc. 4th IFIP Coll. on Techniques of Optimization*, Los Angeles, (1971), pp. 137-158.

(12) Banichuk, N. V. : Optimality conditions and analytical methods of shape optimization, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol. 2, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, (1981), pp. 973-1004.

(13) Banichuk, N. V. : *Problems and Methods of Optimal Structural Design*, Plenum Press, New York, (1983).

(14) Banichuk, N. V. : *Introduction to Optimization of Structures*, Springer-Verlag, New York, (1990).

(15) Cea, J. : Problems of shape optimization, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol. 2, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, (1981), pp. 1005-1048.

(16) Cea, J. : Numerical methods of shape optimal design, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol. 2, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, (1981), pp. 1049-1088.

(17) Zolésio, J. P. : The material derivative (or speed) method for shape optimization, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol. 2, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, (1981), pp. 1089-1151.

(18) Zolésio, J. P. : Domain variational formulation for free boundary problems, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol. 2, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, (1981), pp. 1152-1194.

(19) Sokolowski, J. and Zolésio, J. P. : *Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis*, Springer-Verlag, New York, (1991).

(20) Choi, K. K. and Haug E. J. : Shape design sensitivity analysis of elastic structures, *J. Struct. Mech.*, **11**, (1983), pp. 231-269.

(21) Choi, K. K. : Shape design sensitivity analysis of displacement and stress constraints, *J. Struct. Mech.*, **13**, (1985), pp. 27-41.

(22) Arora, J. S. and Cardoso, J. B. : Variational principle for shape design sensitivity analysis, *AIAA J.*, **30**, (1992), pp. 538-547.

(23) Arora, J. S. : An exposition of the material derivative approach for structural shape sensitivity analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **105**, (1993), pp. 41-62.

(24) Haug E. J., Choi, K. K. and Komkov, V. : *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, Orland, (1986).

(25) Choi, K. K. and Seong, H. G. : A numerical method for shape design sensitivity analysis and optimization of built-up structures, *The Optimum Shape: Automated Structural Design*, edited by Bennett, J. A. and Botkin, M. E., Plenum Press, New York, (1986), pp. 329-352.

(26) Schmit, L. A. : Structural design by systematic synthesis, *Proc. of Second Conference on Electronic Computation ASCE*, New York, (1960), pp. 105-122.

(27) Zienkiewicz, O. C. and Campbell, J. S. : Shape optimization and sequential linear programming, *Optimum Structural Design - Theory and Applications* -, edited by Gallagher, R. H. and Zienkiewicz, O. C., John Wiley & Sons, London, (1973), pp. 109-126.

(28) Fox, R. L and Kapoor, M. P : Rates of change of eigenvalues and eigenvectors, *AIAA Journal*, **6**, (1968), pp. 2426-2427.

(29) Imam, M. H. : Three-dimensional Shape Optimization, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, **18**, (1982), pp. 661-673.

(30) Haslinger, J. and Neittaanmäki, P. : *Finite Element Approximation for Optimal Shape Design: Theory and Application*, John Wiley & Sons, Chichester, (1988).

(31) Haslinger, J. and Neittaanmäki, P. : *Finite Element Approximation for Optimal Shape, Material and Topology Design*, John Wiley & Sons, Chichester, (1996).

(32) Braibant, V. and Fleury, C. : Shape optimal design using B-splines, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **44**, (1984), pp. 247-267.

(33) Braibant, V. and Fleury, C. : An approximation concepts approach to shape optimal design, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **53**, (1985), pp. 119-148.

(34) Yang, R. J. and Choi, K. K. : Accuracy of finite element based shaped design sensitivity analysis, *ASCE J. Structural Mech.*, **13**, (1985), pp. 223-239.

(35) Bennett, J. A. and Botkin, M. E. : Shape optimization of two dimensional structures with geometric problem description and mesh refinement, *Proceedings of AIAA/ASME/ASCE/AHS 24th Structures, Structural Dynamics and Material Conference*, (1983), pp. 422-431.

(36) Bennett, J. A. and Botkin, M. E. : Structural shape pptimization with geometric description and adaptive mesh refinement, *AIAA J.*, **23**, (1983), pp. 458-464.

(37) Kikuchi, N., Chung, K. Y., Torigaki, T. and Taylor, J. E. : Adaptive finite element methods for shape optimization of linearly elastic structures, *The Optimum Shape: Automated Structural Design*, edited by Bennett, J. A. and Botkin, M. E., Plenum Press, New York, (1986), pp. 139-169.

(38) Belegundu, A. D. and Rajan, S. D. : A shape optimization approach based on natural design varaibles and shape functions, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **66**, (1988), pp. 87-106.

(39) Raasch, I., Chargin, M. S. and Bruns, R. : Optimierung von pkw-bauteilen in bezug auf form und dimensionierung, *VDI Berichte*, Nr. 699, (1988), pp. 713-748.

(40) Vanderplaats, G. N. : *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design - with Applicaions*, McGraw-Hill, NewYork, (1984).

(41) Vanderplaats, G. N. and Miura, H. : GENESIS-structural synthesis software using advanced approximation techniques, *AIAA Report*, 92-4839-CP, (1992), pp. 180-190.

(42) Hou, J. W. and Sheen, J. S. : On the velocity field in the domain and boundary methods for shape optimization, *AIAA Paper*, No. 88-2338, (1986), pp. 1032-1040.

(43) 畔上秀幸：領域最適化問題の一解法, 日本機械学会論文集, A 編, 60 巻, (1994), pp. 1479-1486.

(44) 下田昌利, 呉志強, 畔上秀幸, 桜井俊明：汎用 FEM コードを利用した領域最適化問題の数値解析法 (力法によるアプローチ), 日本機械学会論文集, A 編, 60 巻, (1994), pp. 2418-2425.

(45) 畔上秀幸, 呉志強：線形弾性問題における領域最適化解析（力法によるアプローチ）, 日本機械学会論文集, A 編, 60 巻, (1994), pp. 2312-2318.

(46) 呉志強, 畔上秀幸：固有振動問題における領域最適化解析 (力法によるアプローチ), 日本機械学会論文集, C 編, 61 巻, (1995), pp. 930-937.

(47) 呉志強, 畔上秀幸：周波数応答問題における領域最適化解析 (力法によるアプローチ), 日本機械学会論文集, C 編, 61 巻, (1995), pp. 3968-3975.

(48) 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明：応力分布を規定した連続体の境界形状決定, 日本機械学会論文集, 62 巻, A 編, pp. 2393-2400, 1996.

(49) 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明：ホモロガス変形を目的とする連続体の形状決定, 日本機械学会論文集, A 編, 62 巻, (1996), pp. 2831-2837.

(50) 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明：形状最適化におけるミニマックス問題の数値解法（最大応力と最大変位の最小設計）, 日本機械学会論文集, A 編, 63 巻, (1997), pp. 610-617.

(51) 片峯英次, 畔上秀幸：粘性流れ場の領域最適化解析 (対流項を含む場合), 日本機械学会論文集, B 編, 61 巻, (1995), pp. 1646-1653.

(52) 片峯英次, 畔上秀幸：ポテンシャル流れ場の領域最適化解析, 日本機械学会論文集, B 編, 61 巻, (1995), pp. 103-108.

(53) Azegami, H., Kaizu, S., Shimoda, M. and Katamine, E. : Irregularity of shape optimization problems and an improvement technique, *Computer Aided Optimization Design of Structures V*, edited by Hernandez, S. and Brebbia, C. A., Computational Mechanics Publications, Southampton, (1997), pp. 309-326.

(54) Maier, G. : Limit design in the absence of a given layout: a finite-element, zero-one programming program, *Optimum Structural Design - Theory and Applications -*, edited by Gallagher, R. H. and Zienkiewicz, O. C., John Wiley & Sons, London, (1973), pp. 223-239.

(55) Zavelani, A., Maier, G. and Binda, L.: Shape optimization of plastic structures by zero-one programming, *Optimization in Structural Design*, edited by Sawczuk, A. and Mróz, Z., Springer-Verlag, London, (1975), pp. 541-554.

(56) 大河内偵一, 福富康志, 鳥居稔, 坂井浩：機械構造の形状最適化計画（離散化形状変換の感度関数）, 日本機械学会論文集, A 編, 52 巻, (1984), pp. 1119-1125.

(57) 大河内偵一, 伊藤志成, 相原章：機械構造の軽量化計画（多連結体創成による構造軽量化）, 日本機械学会論文集, A 編, 56 巻, (1990), pp. 1304-1310.

(58) Atrek, E. : SHAPE: a program for shape optimization of continuum structures, *Computer Aided Optimization Design of Structures: Applications*, edited by Brebbia, C. A. and Hernandez, S., Computational Mechanics Publications, Southampton, (1989), pp. 135-144.

(59) Murat, F. : Contre-exemples pour divers problémes ou le contrôle intervient dans les coefficients, *Ann. Mat. Pura ed Appl.*, Serie 4, **121**, (1977), pp. 49-68.

(60) Murat, F. : Control in coefficients , *Systems and Controle Encyclopedia: Theory, Technology, Applications*, Pergamon Press, (1985).

(61) Bendsøe, M. P. : *Optimization of Structural Topology, Shape, and Material*, Springer-Verlag, Berlin, (1995).

(62) Olhoff, N. : Optimal design of vibrating rectangular plates, *Int. J. Solids Structures*, **10**, (1974), pp. 93-109.

(63) Olhoff, N. : On singurarities, local optima and formation of stiffners in optimal design, *Proc. IUTAM Symp. on Optimization in Structural Design*, edited by Sawzuk, A. and Mroź, Z., (1975), pp. 82-103.

(64) Cheng, K.-T. and Olhoff, N. : An investigation concerning optimal design of solid elastic plates, *Int. J. Solids Structures*, **17**, (1981), pp. 305-323.

(65) Cheng, K. T. and Olhoff, N. : Regularized formulation for optimal design of axisymmetric plates, *Int. J. Solids Structures*, **18**, (1982), pp. 153-169.

(66) 菊池昇: 均質化法による最適設計理論, 応用数理, 3 巻, 1 号, 日本応用数理学会編, 岩波書店, (1992), pp. 2-26.

(67) Lurie, K. A., Cherkaev, A. V. and Fedorov, A. V. : Regurarization of optimal design problems for bars and plates, *J. Optim, Theory Appl.*, **37**, (1982), pp. 499-522 (Part I), pp. 523-543 (Part II) and **42**, pp. 247-282 (Part III).

(68) Kohn, R. V. and Strang, G. : Optimal design and relaxation of variational problems, *Comm. Pure Appl. Math.*, **39**, (1986), pp. 1-25 (Part I), pp. 139-182 (Part II) and pp. 353-377 (Part III).

(69) Kohn, R. V. and Strang, G. : Optimal design in elasticity and plasticity, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **22**, (1986), pp. 183-188.

(70) Avellaneda, M. : Optimal bounds and microgeometries for elastic two-phase composites, *SIAM J. Appl. Math.*, **47**, (1987), pp. 1216-1228.

(71) Bendsøe, M. P. : Optimal shape design as a material distribution problem, *Structural Optimization*, **1**, (1989), pp. 193-202.

(72) Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N. : Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comput. Meths Appl. Mech. Engrg.*, **71**, (1988), pp. 197-224.

(73) Guedes, J. M. and Kikuchi, N. : Preprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Comput. Meths Appl. Mech. Engrg.*, **83**, (1990), pp. 143-198.

(74) Suzuki, K. and Kikuchi, N. : A homogenization method for shape and topology optimization, *Comput. Meths Appl. Mech. Engrg.*, **93**, (1991), pp. 291-318.

(75) Díaz, A. R and Kikuchi, N. : Solutions to shape and topology eignvalue optimization problems using a homogenization method, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, **35**, (1992), pp. 1487-1502.

(76) Ma, Z. D. , Kikuchi, N. and Hagiwara, I. : Structural topology and shape optimization for a frequency response problem, *Computational Mechanics*, **13**, (1993), pp. 157-174.

(77) 西脇眞二, Frecker, M. I., 閔勝載, 菊池昇 : 柔軟性を考慮した構造の最適化（第１報，定式化とコンプライアントメカニズムへの応用）, 日本機械学会論文集, C 編, 63 巻, (1997), pp. 2657-2664.

(78) Díaz, A. R and Sigmund, O. : Checkerboard patterns in layout optimization, *Structural Optimization*, **10**, (1995), pp. 40-45.

(79) Mlejnek, H. P. and Schirrmacher, R. : An engineer's approach to optimal material distribution and shape finding, *Comput. Meths Appl. Mech. Engrg.*, **106**, (1993), pp. 1-26.

(80) Sigmund, O. : Materials with prescribed constitutive parameters: an inverse homogenization problem, *Int. J. Solids Structures*, **31**, (1994), pp. 2313-2329.

(81) Prager, W. and Taylor, J. E. : Problems of optimal structural design, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, (1968), pp. 102-106.

(82) Prager, Q. : Conditions for structural optimality, *Comput. Struct.*, **2**, (1972), pp. 833-840.

(83) Venkayya, V. B. and Khot, N. S. : Design of optimum structures for dynamic loads, *Proceedings of 3rd. Conf. Matrix Meth. Struct. Mech.*, Ohio, (1971), pp. 619-658.

(84) Khot, N. S., Venkayya, V. B. and Berke, L. : Optimum structural design with stability constraints, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, **10**, (1976), 1097-1114.

(85) Fleury, C. : A unified approach to structural weight minimization, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **20**, (1979), pp. 17-38.

(86) Rozvany, G. I. N. : *Structural Design via Optimality Criteria*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, (1989).

(87) Zhou, M. and Rozvany, G. I. N. : DCOC: An optimality criteria method for large systems, Part I: Theory, *Structural Optimization*, **5**, (1992), pp. 12-25.

(88) Rozvany, G. I. N. and Zhou, M. : Layout and generalized shape optimization by iterative COC methods, *Optimization of Large Structural Systems*, edited by Rozvany, G. I. N., Vol. 1, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, (1993), pp. 103-120.