

流体・構造連成問題における形状最適化

Shape Optimization on Fluid-Structure Interaction Problems

浜崎純也, 名大情報科学研究科, 〒 464-8601 名古屋市千種区不老町 1

○ 畔上秀幸, 名大情報科学研究科, 〒 464-8601 名古屋市千種区不老町 1, E-mail: azegami@is.nagoya-u.ac.jp

Junya Hamasaki, Grad. Sch. of Information Science, Nagoya University, 1 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya

Hideyuki AZEGAMI Grad. Sch. of Information Science, Nagoya University, 1 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya

Solution of non-parametric shape optimization problem for fluid-structure interaction problem is presented. Considering an elastic body put in steady flow field of incompressible fluid, as an example, minimization problem of the dissipation energy in the flow field under volume constraint of the elastic body is formulated. Shape variation is formulated with a family of continuous functions defined in an original domain of flow field and elastic body mapping to a new domain. Shape gradient is derived by the adjoint variable method. Reshaping is carried out by the traction method presented by one of the authors to keep smoothness of the interface. Validity of the solution is confirmed by numerical example for a two dimensional elastic body put in steady flow field of viscous fluid.

1. はじめに

流体と構造の連成問題の数値解析は生体や流れ場に置かれた柔軟構造のシミュレーションの必要性から需要が高まっている。近年では、数値解析の結果を利用したパラメトリックな形状最適化問題も解かれるようになってきた。本稿では、流体・構造連成問題の形状最適化をノンパラメトリック形状最適化問題として定式化し、形状勾配を利用した力法^{1, 2, 3}による解法を示す。

2. 流体・構造連成問題

流れ場に置かれた弾性体を想定して、図 1 のような有界な $d = 2, 3$ 次元領域 $\Omega^f \subset \mathbb{R}^d$ (\mathbb{R} は実数の集合), その境界 Γ^f , で定義された粘性流体の流れ場に囲まれた弾性体の領域 Ω^s , その境界 Γ^s を考えよう。この場合、弾性体の境界 Γ^s はすべて流れ場との連成境界となる ($\Gamma^s \subset \Gamma^f$)。弾性体は、部分境界 Γ_0^s (測度は零ではない) で変位が拘束されていると仮定する。粘性流体は、流れ場の外側境界 $\Gamma^f \setminus \Gamma^s$ の部分境界 Γ_0^f では規定流速 $\mathbf{u}_{\Gamma,t}^f(\mathbf{x}, t) \equiv \{\partial u_{\Gamma,i}^f / \partial t\}_{i=1}^d$ ($\mathbf{x} \in \Gamma_0^f, t \in (0, T)$) が与えられ、流速が規定されていない外側部分境界 $\Gamma^f \setminus (\Gamma^s \cup \Gamma_0^f)$ (測度は零ではない) では流れ場の応力が零と仮定する。また、時刻 $t = 0$ のとき、流れ場の流速、圧力、および弾性体の変位は零であると仮定する。このとき、流れ場では時刻 $t \in (0, T)$ において流速 $\mathbf{u}_{i,t}^f(\mathbf{x}, t)$ ($\mathbf{x} \in \Omega^f$) と圧力 $p(\mathbf{x}, t)$ ($\mathbf{x} \in \Omega^f$) が生じ、弾性体では、流れ場から圧力と粘性力を受けて変位 $\mathbf{u}^s(\mathbf{x}, t)$ ($\mathbf{x} \in \Omega^s$) が生ずると仮定する。弾性体の境界 Γ^s では流れ場の変位 \mathbf{u}^f と弾性体の変位 \mathbf{u}^s は一致する。

この流れ場・構造連成問題の運動方程式と境界条件および初期条件は次式となる。ただし、非圧縮性の粘性流体

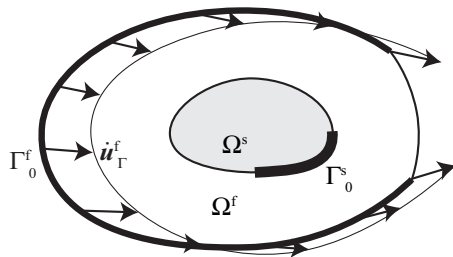


Fig. 1: Fluid-structure interaction system

を仮定し、密度を ρ^f とする。弾性体の密度を ρ^s とする。

$$\rho^f u_{i,tt}^f + \rho^f u_{i,jt}^f u_{j,t}^f - \sigma_{ij,j}^f(p, \mathbf{u}^f) = 0 \quad \text{in } \Omega^f \quad (1)$$

$$u_{i,it}^f = 0 \quad \text{in } \Omega^f \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_{i,t}^f - \mathbf{u}_{0,t}^f = 0 \quad \text{on } \Gamma_0^f \quad (3)$$

$$\sigma_{ij}^f(p, \mathbf{u}^f) n_j^f = 0 \quad \text{on } \Gamma^f \setminus (\Gamma^s \cup \Gamma_0^f) \quad (4)$$

$$\rho^s \ddot{u}_i^s - \sigma_{ij,j}^s(\mathbf{u}^s) = 0 \quad \text{in } \Omega^s \quad (5)$$

$$u_i^s = 0 \quad \text{on } \Gamma_0^s \quad (6)$$

$$\sigma_{ij}^f(p, \mathbf{u}^f) n_j^f + \sigma_{ij}^s(\mathbf{u}^s) n_j^s = 0 \quad \text{on } \Gamma^s \setminus \Gamma_0^s \quad (7)$$

$$u_i^f - u_i^s = 0 \quad \text{on } \Gamma^s \quad (8)$$

$$u_i^f = u_i^s = u_{i,t}^f = u_{i,t}^s = p = 0 \quad \text{at } t = 0 \quad (9)$$

添え字に対して $(\cdot)_{,i} \equiv \partial(\cdot) / \partial x_i$ および総和規約を用いる。流れ場において、応力 $\sigma_{ij}^f(p, \mathbf{u}^f) = -p\delta_{ij} + \mu\varepsilon_{ij}^f(\mathbf{u}^f)$, μ は粘性係数, $\varepsilon_{ij}^f(\mathbf{u}^f) = (u_{i,j}^f + u_{j,i}^f) / 2$ である。弾性体において、応力 $\sigma_{ij}^s(\mathbf{u}^s) = C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^s(\mathbf{u}^s)$ は Cauchy 応力, $\varepsilon_{ij}^s(\mathbf{u}^s) = (u_{i,j}^s + u_{j,i}^s - u_{k,i}^s u_{k,j}^s) / 2$ は Almansi ひずみ, $\{C_{ijkl}\}_{i,j,k,l=1}^d$ は剛性とする。 $\mathbf{n}^m = \{n_i^m\}_{i=1}^d$ は Ω^m の境界における外向き単位法線である。

この問題の運動方程式に、随伴変位の集合 U_v を式 (20) のように定義して、任意の随伴変位 $\mathbf{v} \in U_v$ と随伴圧力 $q \in Q$ を乗じて積分し、境界条件を考慮することによって次の弱形式を得る。

$$\int_0^T \left\{ a^f(\mathbf{u}_{i,t}^f, \mathbf{v}_{i,t}^f) + b^f(\mathbf{u}_{i,tt}^f, \mathbf{v}_{i,t}^f) + c^f(\mathbf{u}_{i,t}^f, \mathbf{u}_{i,t}^f, \mathbf{v}_{i,t}^f) - d^f(\mathbf{v}_{i,t}^f, p) + d^f(\mathbf{u}_{i,t}^f, q) + a^s(\mathbf{u}^s, \mathbf{v}^s) + b^s(\mathbf{u}_{i,tt}^s, \mathbf{v}_{i,t}^s) + e^f(p, \mathbf{u}_{i,t}^f, \mathbf{v}_{i,t}^f) + e^s(\mathbf{u}^f, \mathbf{v}^f) \right\} dt = 0$$

$$\mathbf{u} \in U_u, p \in Q, \forall \mathbf{v} \in U_v, \forall q \in Q \quad (10)$$

ただし, 以下の定義に従う.

$$a^f(\mathbf{u}^f, \mathbf{v}^f) \equiv \int_{\Omega^f} \mu \varepsilon_{ij}^f(\mathbf{u}^f) \varepsilon_{ij}^f(\mathbf{v}^f) d\Omega \quad (11)$$

$$a^s(\mathbf{u}^s, \mathbf{v}^s) \equiv \int_{\Omega^s} \sigma_{ij}^s(\mathbf{u}^s) \varepsilon_{ij}^s(\mathbf{v}^s) d\Omega \quad (12)$$

$$b^f(\mathbf{u}^f, \mathbf{v}^f) \equiv \int_{\Omega_a} \rho^f \mathbf{u}^f \mathbf{v}^f d\Omega \quad (13)$$

$$b^s(\mathbf{u}^s, \mathbf{v}^s) \equiv \int_{\Omega^s} \rho^s u_i^s v_i^s d\Omega \quad (14)$$

$$c^f(\mathbf{u}^f, \mathbf{v}^f, \mathbf{w}^f) \equiv \int_{\Omega^f} \rho^f v_{i,j}^f u_j^f w_i^f d\Omega \quad (15)$$

$$d^f(\mathbf{u}^f, p) \equiv \int_{\Omega^f} u_{i,i}^f p d\Omega \quad (16)$$

$$e^f(p, \mathbf{u}^f, \mathbf{v}^f) \equiv \int_{\Gamma^s} \sigma_{ij}^f(p, \mathbf{u}^f) n_j^f v_i^f d\Gamma \quad (17)$$

$$e^s(\mathbf{u}^s, \mathbf{v}^s) \equiv \int_{\Gamma^s} \sigma_{ij}^s(\mathbf{u}^s) n_j^s v_i^s d\Gamma \quad (18)$$

$$U_u \equiv \left\{ \mathbf{u} \mid \begin{aligned} &\mathbf{u} = \mathbf{u}^f \in (H^1(\Omega^f \times (0, T)))^d \text{ in } \Omega^f, \\ &\mathbf{u} = \mathbf{u}^s \in (H^1(\Omega^s \times (0, T)))^d \text{ in } \Omega^s, \\ &\mathbf{u}_{,t} = \mathbf{u}_{\Gamma,t}^f \text{ on } \Gamma_0^f, \\ &\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_0^s, \\ &\mathbf{u}^f = \mathbf{u}^s \text{ on } \Gamma^s, \\ &\mathbf{u} = \mathbf{u}_{,t} = \mathbf{0} \text{ at } t = 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$U_v \equiv \left\{ \mathbf{v} \mid \begin{aligned} &\mathbf{v} = \mathbf{v}^f \in (H^1(\Omega^f \times (0, T)))^d \text{ in } \Omega^f, \\ &\mathbf{v} = \mathbf{v}^s \in (H^1(\Omega^s \times (0, T)))^d \text{ in } \Omega^s, \\ &\mathbf{v}_{,t} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_0^f, \\ &\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_0^s, \\ &\mathbf{v}^f = \mathbf{v}^s \text{ on } \Gamma^s, \\ &\mathbf{v} = \mathbf{v}_{,t} = \mathbf{0} \text{ at } t = T \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$Q \equiv \{q \in L^2(\Omega^f \times (0, T))\} \quad (21)$$

3. 散逸エネルギー最小化問題

流体・構造連成系の形状最適化の例として, 流れ場に置かれた弾性体の形状を変化させて, 流れ場の散逸エネルギーを最小化する問題を考えてみよう⁴. 流れ場の外側境界 $\Gamma^f \setminus \Gamma^s$ と弾性体の変位拘束部分境界 Γ_0^s は固定するものとする. また, 弾性体の体積は零に向かう可能性があることから, 弾性体の体積を下限值 m_0 以上に制限する. この問題は次のように表すことができる.

$$\min_{\Omega^s \subset \mathbb{R}^d} \left\{ J \equiv \int_0^T a^f(\mathbf{u}_{,t}^f, \mathbf{u}_{,t}^f) dt \right\} \\ \text{such that } m_0 - \int_{\Omega^s} d\Omega \leq 0 \quad (22)$$

この問題の Kuhn-Tucker 条件は, 式 (23) で定義する Lagrange 乗数形式 $L(\Omega^s, \mathbf{u}_{,t}^f, \Lambda)$ に対して, 式 (24) から

(27) が成立することである.

$$L = J(\Omega^s, \mathbf{u}_{,t}^f) + \Lambda \left(m_0 - \int_{\Omega^s} d\Omega \right) \quad (23)$$

$$\dot{L} = 0 \quad (24)$$

$$\Lambda \left(m_0 - \int_{\Omega^s} d\Omega \right) = 0 \quad (25)$$

$$m_0 - \int_{\Omega^s} d\Omega \leq 0 \quad (26)$$

$$\Lambda \geq 0 \quad (27)$$

ただし, L の領域変動に対する物質導関数 \dot{L} は次式で与えられる.

$$\dot{L} = \dot{J} + \langle G_\Lambda \mathbf{n}, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^s} \quad (28)$$

$$\dot{J} = \int_0^T \left\{ 2a^f(\mathbf{u}_{,t}^f, \mathbf{u}_{,t}^f) + \langle G^{af} \mathbf{n}^f, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^s} \right\} dt \quad (29)$$

$$G_\Lambda = -1 \text{ on } \Gamma^s \quad (30)$$

$$G^{af} = \mu \varepsilon_{ij}^f(\mathbf{u}^f) \varepsilon_{ij}^f(\mathbf{u}^f) \text{ on } \Gamma^s \quad (31)$$

ただし, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma^s}$ は次の定義に従う.

$$\langle G^{af} \mathbf{n}^f, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^s} \equiv \int_{\Gamma^s} G^{af} n_i^f V_i d\Gamma \quad (32)$$

\mathbf{V} は領域変動速度である. $(\cdot)' = (\dot{\cdot}) - (\cdot)_{,i} V_i$ は形状導関数, (\cdot) は物質導関数を表す.

原問題の弱形式 (10) に対して, 任意の領域変動に対する物質導関数を計算し, \mathbf{u}, p は原問題の解, さらに, $\mathbf{v} \in U_v, q \in Q$ であることを考慮すれば, 次式を得る.

$$\int_0^T \left\{ a^f(\mathbf{u}_{,t}^f, \mathbf{v}_{,t}^f) - b^f(\mathbf{u}_{,t}^f, \mathbf{v}_{,tt}^f) + c^f(\mathbf{u}_{,t}^f, \mathbf{u}_{,t}^f, \mathbf{v}_{,t}^f) \right. \\ \left. + c^f(\mathbf{u}_{,t}^f, \mathbf{u}_{,t}^f, \mathbf{v}_{,t}^f) - d^f(\mathbf{v}_{,t}^f, p') + d^f(\mathbf{u}_{,t}^f, q) \right. \\ \left. + a^s(\mathbf{u}^s, \mathbf{v}^s) + b^s(\mathbf{u}^s, \dot{\mathbf{v}}^s) \right. \\ \left. + e^f(p', \mathbf{u}_{,t}^f, \mathbf{v}^f) + e^s(\mathbf{u}^f, \mathbf{v}^f) \right\} dt \\ = \int_0^T \left(\langle G^f \mathbf{n}^f, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^f} + \langle G^s \mathbf{n}^s, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^s} \right) dt \\ \mathbf{v} \in U_v, q \in Q, \forall \mathbf{u}' \in U_u, \forall p' \in Q \quad (33)$$

$$G^f = \sigma_{ij}^f(p, \mathbf{u}_{,t}^f) \varepsilon_{ij}^f(\mathbf{v}_{,t}^f) + \rho^f \mathbf{u}_{,tt}^f \mathbf{v}_{,t}^f + \rho^f u_{i,jt}^f u_{j,t}^f v_{i,t}^f \\ + u_{i,it}^f q \text{ on } \Gamma^f \quad (34)$$

$$G^s = \sigma_{ij}^s(\mathbf{u}^s) \varepsilon_{ij}^s(\mathbf{v}^s) + \rho^s \dot{u}_i^s v_i^s \\ + \left\{ (\sigma_{ij}^s(\mathbf{u}^s) - \sigma_{ij}^f(p, \mathbf{u}_{,t}^f)) n_j^s v_i^s \right\}_{,k} n_k^s \\ + (\sigma_{ij}^s(\mathbf{u}^s) - \sigma_{ij}^f(p, \mathbf{u}_{,t}^f)) n_j^s v_i^s k^s \\ = \sigma_{ij}^s(\mathbf{u}^s) \varepsilon_{ij}^s(\mathbf{v}^s) + \rho^s \dot{u}_i^s v_i^s \\ + \sigma_{ij}^s(\mathbf{u}^s) n_j^s (\varepsilon_{ik}^f(\mathbf{v}^s) - \varepsilon_{ik}^f(\mathbf{v}^f)) n_k^s \text{ on } \Gamma^s \quad (35)$$

ただし, $\kappa^{m,i} \equiv n_{i,i}^m$ は Ω^m の境界における平均曲率の $d-1$ 倍である. 式 (33) において時間積分に対して部分積分を

施した．また，式 (35) において $\mathbf{n}^f = -\mathbf{n}^s$, $\kappa^f = -\kappa^s$, $\mathbf{v}^f = \mathbf{v}^s$, 式 (7) の関係を用いた．ここで，随伴問題を次式で定義する．

$$\text{式 (33) の左辺} = \int_0^T 2a^f(\mathbf{u}_{,t}^f, \mathbf{u}_{,t}^f) dt$$

$$\mathbf{v} \in U_v, q \in Q, \forall \mathbf{u}' \in U_u, \forall p' \in Q \quad (36)$$

この問題の解 \mathbf{v}, q を用いれば，式 (29) を次のように置き換えることができる．式 (29) の右辺被積分項第 1 項は，式 (36) の右辺と等しく，さらに，式 (36) の左辺は，式 (33) の右辺に等しい．したがって，次式を得る．

$$j = \int_0^T \left\{ \langle G^f \mathbf{n}^f, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^f} + \langle G^s \mathbf{n}^s, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^s} + \langle G^{af} \mathbf{n}^f, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^s} \right\} dt$$

$$= \int_0^T \langle G_J \mathbf{n}^s, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma^s} d\omega \quad (37)$$

ただし，流れ場の外側境界 $\Gamma^f \setminus \Gamma^s$ と弾性体の変位拘束部分境界 Γ_0^s の変動を拘束し，速度 \mathbf{V} の許容集合 D を次のように定義する．

$$D = \{ \mathbf{V} \in C^{0,1}(\Omega^f \cup \Omega^s, \mathbb{R}^d) \mid \mathbf{V} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma^f \setminus \Gamma^s \cup \Gamma_0^s \}$$

$$(38)$$

$G_J \mathbf{n}^s$ は散逸エネルギーに対する形状勾配， G_J は形状勾配密度である．

目的汎関数と制約汎関数の形状勾配が $G_J \mathbf{n}^s, G_\Lambda \mathbf{n}^s$ として計算されれば，最適化に向う形状更新は手法によって解析できる．

4. 解析例

理論の妥当性を確認するために，非圧縮性粘性流体の 2 次元定常流れ場の中に 2 次元弾性体が置かれたモデルに対する解析を行った．問題設定と要素分割を図 2 に示す．流れ場の左端を流速規定部分境界 Γ_0^f とし，規定流速 $\mathbf{u}_{\Gamma,t}^f$ は x_1 方向の一樣流速を仮定した．弾性体の Young 率 22 [GPa]，Poisson 比 0.3， Γ_0^f の長さ 1 [m] を特性長さ，流れ場の動粘性係数を 1 [m²/s] としたときの Reynolds 数が 20 となるように設定した．

流れ場では，流速 2 次，圧力 1 次近似の 3 角形要素を使用した．目的汎関数の形状勾配 $G_J \mathbf{n}^s$ は次の手順で解析した．

- (1) 定常を仮定した式 (10) を Newton-Raphson 法で解く．ただし，増分を計算するたびに，流れ場を弾性体と仮定し，連成部分境界の変位を強制変位として与えたときの流れ場領域の変位を用いてメッシュを更新した．
- (2) その解を用いて，定常を仮定した式 (36) を解く．
- (3) 上記の解を用いて， $G_J \mathbf{n}^s$ を計算する．

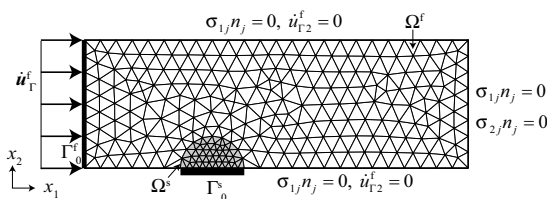


Fig. 2: 非圧縮性流体の流れ場に置かれた弾性体

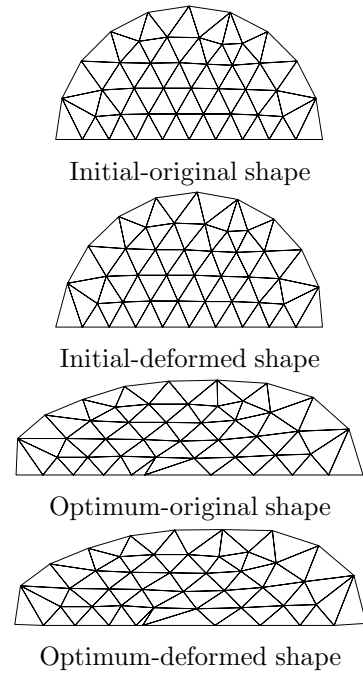


Fig. 3: 弾性体の初期形状と最適形状

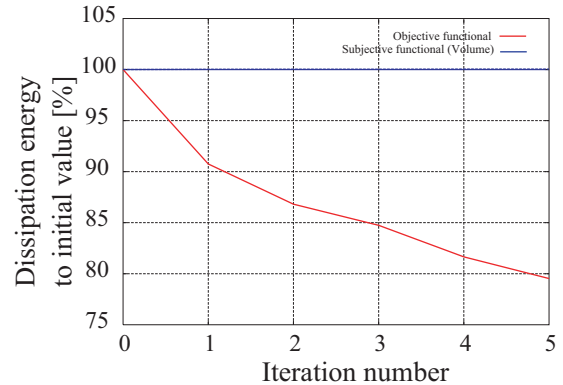


Fig. 4: 収束履歴

初期モデルおよび最適化された弾性体の原形状と流れ場で変形したときの形状を図 3 に示す．目的汎関数の収束履歴を図 4 に示す．目的汎関数は 79%まで減少した．

参考文献

1. 畔上秀幸. 領域最適化問題の一解法. 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 60, pp. 1479–1486, 1994.
2. H. Azegami and K. Takeuchi. A smoothing method for shape optimization: Traction method using the robin condition. *International Journal of Computational Methods*, Vol. 3, No. 1, pp. 21–33, 3 2006.
3. 海津聰, 畔上秀幸. 形状最適化問題と手法の数学的解釈. 日本応用数理学会論文誌, Vol. 16, No. 3, pp. 277–290, 9 2006.
4. E. Katamine, H. Azegami, T. Tsubata, and S. Itoh. Solution to shape optimization problems of viscous flow fields. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol. 19, No. 1, pp. 45–51, 1 2005.